

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

**Intégrale, Synthèse**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons graphiquement la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A:

La quantité de produit B dépasse celle de produit A dès que la courbe  $\mathcal{C}_g$  se situe au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Or cela se produit quand:  $x \in ]5; 6[$  (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 5,3 \text{ mois.}$$

Au total, la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A est d'environ: 5,3 mois.

2. Déterminons au bout de combien de mois la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte par le produit B:

La quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B quand:  $g(x) = 3000$ .

Or cela se produit quand:  $x \in ]12; 13[$  (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 12,7 \text{ mois.}$$

Au total, la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B au bout d'environ: 12,7 mois.

## Partie B:

1. a. Déterminons ce que modélise cette fonction:

Comme  $h(x) = f(x) + g(x)$ ,  $h(x)$  représente la quantité totale de produit A et de produit B fabriquées par l'usine.

1. b. Montrons que, pour tout  $x \in [0; 14]$ ,  $h'(x) = -400 e^{-0,2x} + 30x + 50$ :

- Ici:
- $f(x) = 2000 e^{-0,2x}$
  - $g(x) = 15x^2 + 50x$
  - $Df = Dg = [0; 14]$ .

$f$  et  $g$  sont toutes deux dérivables sur  $[0; 14]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  et  $g'$  sur  $[0; 14]$ .

Pour tout  $x \in [0; 14]$ :

- $f'(x) = -0,2 \times 2000 \times e^{-0,2x}$   
 $= -400 e^{-0,2x}$ ;
- $g'(x) = 30x + 50$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 14]$ :  $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

cad:  $h'(x) = -400 e^{-0,2x} + 30x + 50$ .

2. a. a). Montrons que sur  $[0; 14]$ , l'équation  $h'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ :

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $h'$  est continue sur  $[0; 14]$ .

• " $k = 0$ " est compris entre:  $h'(0) = -350$

et:  $h'(14) \approx 446$ .

•  $h'$  est strictement croissante sur  $[0; 14]$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $h'(x) = 0$  ( $k = 0$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[0; 14]$ .

**Au total:**  $h'(x) = 0$  admet exactement une solution unique  $\alpha$  sur  $[0; 14]$ .

2. a. a2. Donnons un encadrement d'amplitude  $0, 1$  de  $\alpha$ :

Par tâtonnement et à l'aide d'une calculatrice, nous trouvons:  $\alpha \in [4, 1; 4, 2]$ .

Au total, un encadrement d'amplitude  $0, 1$  de  $\alpha$  est:  $4, 1 \leq \alpha \leq 4, 2$ .

2. b. Déduisons-en les variations de la fonction  $h$  sur  $[0; 14]$ :

D'après les questions précédentes, nous pouvons en déduire que:

- $h$  est strictement décroissante sur:  $[0; \alpha[$ , car  $h'(x) < 0$ ,
- $h$  est strictement croissante sur:  $] \alpha; 14]$ , car  $h'(x) > 0$ ,
- $h$  admet un minimum au point:  $M(\alpha; h(\alpha))$ .

3. a. Déterminons ce que contient alors la variable  $X$  après l'exécution de cet algorithme:

Notons qu'après l'exécution de cet algorithme, la variable  $X$  contient, à  $0, 1$  près, la première valeur telle que  $Y > 0$  cad  $h'(X) > 0$  soit: une valeur approchée de  $\alpha$  à  $0, 1$  près.

3. b. Modifions l'algorithme de façon à ce que  $X$  contienne une valeur approchée à  $0, 001$  près de  $\alpha$  après l'exécution de l'algorithme:

En supposant toujours que la variable  $X$  contienne la valeur  $3$  avant l'exécution de cet algorithme, pour répondre à la question nous devons juste modifier la ligne  $X \leftarrow X + 0, 1$ .

Modification de la ligne  $X \leftarrow X + 0, 1$  en:  $X \leftarrow X + 0, 001$ .

4. a. Vérifions que  $H$  est bien une primitive de la fonction  $h$  sur  $[0; 14]$ :

Sur l'intervalle  $[0; 14]$ ,  $H$  est une primitive de  $h$  ssi:  $H'(x) = h(x)$ .

Ici:  $H(x) = -10000e^{-0,2x} + 5x^3 + 25x^2$ .

D'où:  $H'(x) = (-10000) \times (-0,2e^{-0,2x}) + 15x^2 + 50x$   
 $= 2000e^{-0,2x} + 15x^2 + 50x = h(x)$ .

**Au total:** H est bien une primitive de h sur  $[0; 14]$ .

4. b. Calculons une valeur approchée à l'unité près de  $\frac{1}{12} \int_0^{12} h(x) dx$ :

Préalablement, notons que  $\frac{1}{12} \int_0^{12} h(x) dx$  correspond à la **valeur moyenne**

"m" de h sur  $[0; 12]$ .

Dans ces conditions:  $m = \frac{1}{12} \int_0^{12} h(x) dx$   
 $= \frac{1}{12} [H(x)]_0^{12}$   
 $= \frac{1}{12} (H(12) - H(0))$   
 $\approx 1778$ .

Ainsi, la valeur moyenne de h sur  $[0; 12]$  est d'environ: 1778.

4. c. Donnons une interprétation de m dans le contexte de l'exercice:

Ici, l'interprétation de m est: m correspond à la production moyenne en produits A et B sur les 12 premiers mois.