

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Intégrale, Synthèse



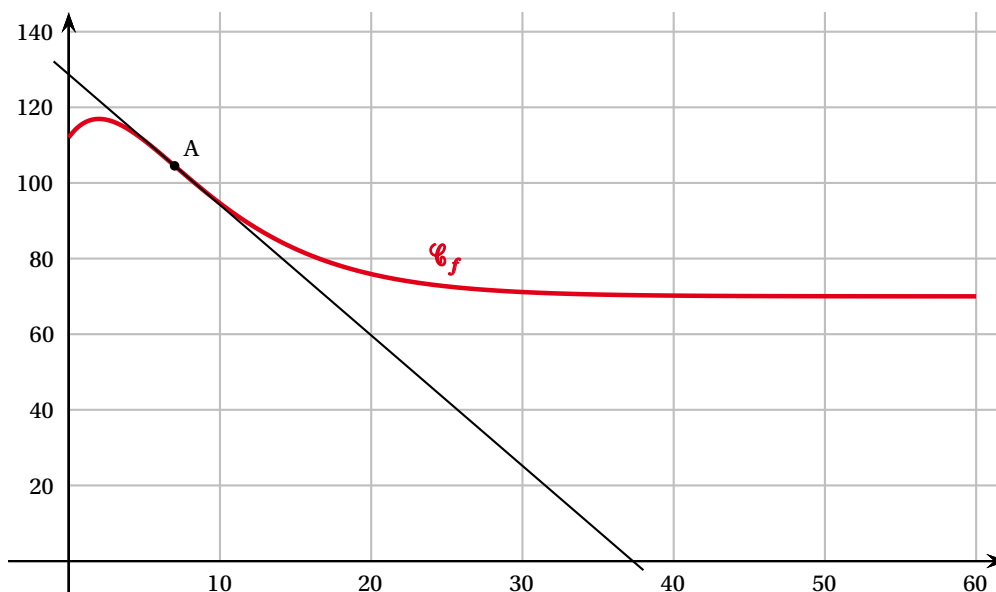
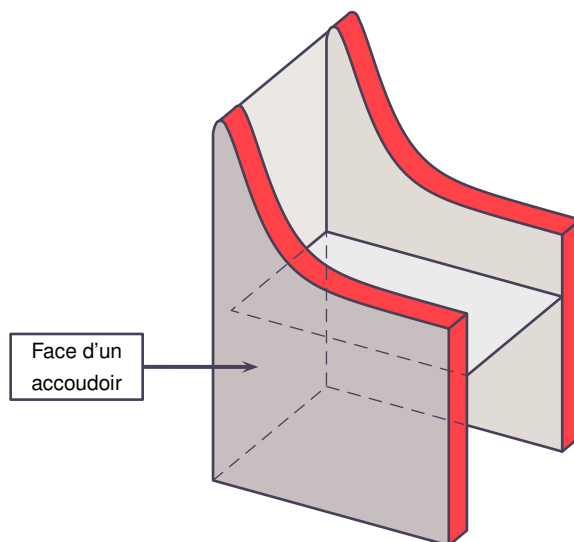
CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$:

Soient les 2 graphiques suivantes:



Graphiquement, il semble que:

- $f(0) \approx 115$,
- $f(60) \approx 72$.

Ainsi, les valeurs approchées de $f(0)$ et $f(60)$ sont:

$$f(0) \approx 115 \text{ et } f(60) \approx 72.$$

2. Déterminons $f''(7)$:

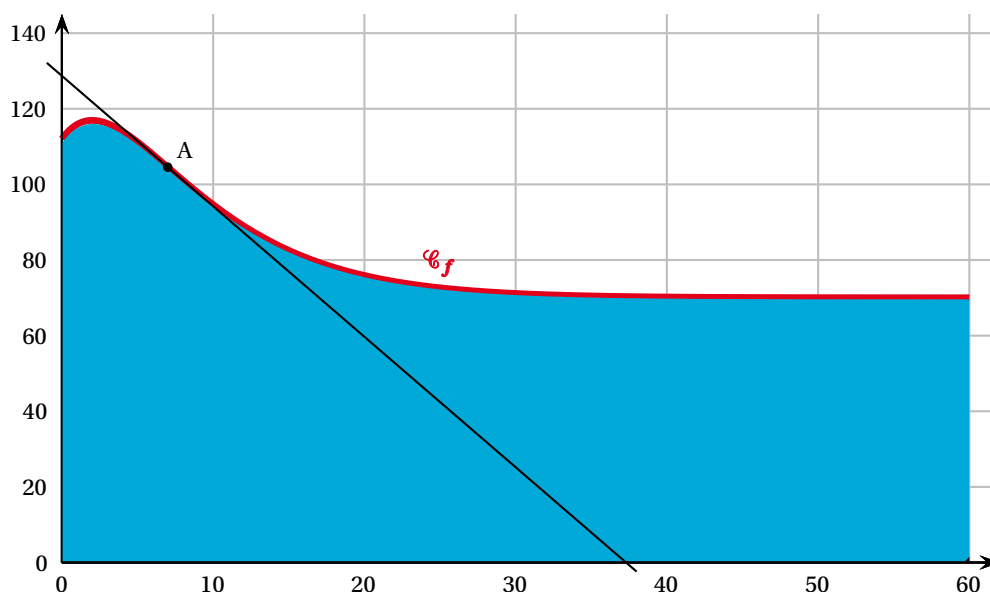
D'après l'énoncé le point A ($7; f(7)$) est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f .

En tant que point d'inflexion, nous pouvons affirmer que: $f''(7) = 0$.

Au total: $f''(7) = 0$.

3. a. Représentons la surface demandée:

La surface située entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f , et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$ correspond à la zone turquoise du graphique suivant:



3. b. L'estimation de l'ébéniste est-elle correcte ?

L'estimation de l'ébéniste n'est pas correcte.

En effet, la zone turquoise contient le rectangle $70 \times 60 = 4200$ u.a.

Par conséquent, l'aire de cette surface turquoise est strictement supérieure à 4200 u.a.

Or: $3800 < 4200$.

Ainsi, comme $3800 < 4200$: l'estimation de l'ébéniste est fautive !

Partie B:

1. Calculons f' sur l'intervalle $[0; 60]$:

Ici: • $f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$ $(70 + u \times e^v)$
 • $Df = [0; 60]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[0; 60]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 60]$.

Pour tout $x \in [0; 60]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + (14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times (e^{-\frac{x}{5}}) \\ &\quad (0 + u' \times e^v + u \times v' \times e^v) \\ &= \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in [0; 60]$, nous avons bien:

$$f'(x) = \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. a. Etudions le signe de f' sur $[0; 60]$:

$$f'(x) = \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}}, \text{ pour tout } x \in [0; 60].$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 60]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -14x + 28 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 2 \text{ ou } x \in [2; 60].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-\frac{x}{5}} > 0$)

• 2^{ème} cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -14x + 28 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 2 \text{ ou } x \in [0; 2].$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-\frac{x}{5}} > 0$)

Ainsi: • f est croissante sur $[0; 2]$,

• f est décroissante sur $[2; 60]$.

2. b. Dressons le tableau des variations de f sur $[0; 60]$:

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0	2	60		
f'		+	0	-	
f			a	b	c

Avec: • $a = 112$,

$$\bullet b = 70 + 70 e^{-\frac{2}{5}}, \quad (\approx 117)$$

$$\bullet c = 70 + 882 e^{-12}. \quad (\approx 70)$$

3. Etudions la convexité de f :

D'après le cours: $\bullet f$ est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

$\bullet f$ est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici: $f''(x) = 14x \left(\frac{x-7}{25} \right) x e^{-\frac{x}{5}}.$

Dans ces conditions: $\bullet f''(x) \leq 0$ ssi: $x \leq 7$ cad: $x \in [0; 7].$

$\bullet f''(x) \geq 0$ ssi: $x \geq 7$ cad: $x \in [7; 60].$

Ainsi: $\bullet f$ est concave sur $I = [0; 7],$

$\bullet f$ est convexe sur $I' = [7; 60].$

4. a. Montrons que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0; 60]$:

Sur l'intervalle $[0; 60]$, G est une primitive de g ssi: $G'(x) = g(x).$

Ici: $G(x) = (-70x - 560) e^{-\frac{x}{5}}$, pour tout $x \in [0; 60].$ $(u \times e^v)$

D'où pour tout $x \in [0; 60]$: $G'(x) = (-70) x (e^{-\frac{x}{5}}) + (-70x - 560) x \left(-\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \right)$

$$(u' \times v + u \times v' \times e^v)$$

$$= (14x + 42) e^{-\frac{x}{5}} = g(x).$$

Au total: G est bien une primitive de g sur $[0; 60]$.

4. b. Déduisons-en une primitive de f sur $[0; 60]$:

Nous remarquons que: $f(x) = g(x) + 70$.

Donc une primitive de f sur $[0; 60]$ est: $G(x) + 70x$.

4. c. Calculons la valeur exacte et la valeur approchée de $\int_0^{60} f(x) dx$:

Il s'agit de calculer ici: $I = \int_0^{60} f(x) dx$.

$$\text{D'où: } I = \int_0^{60} g(x) dx + \int_0^{60} 70 dx$$

$$= [G(x)]_0^{60} + [70x]_0^{60}$$

$$= [(-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}]_0^{60} + [70x]_0^{60}$$

$$= 4760(1 - e^{-12})$$

$$\approx 4760 \text{ à l'unité près.}$$

Au total: • une valeur exacte de I est: $4760(1 - e^{-12})$,

• une valeur approchée de I est: 4760 à l'unité près.

Partie C:

Aura-t-il suffisamment de vernis ?

La surface S à vernir a une aire égale à:

$$A = 4I + 5400 \text{ cad: } A = 24440 \text{ cm}^2.$$

(car: 2 accoudoirs à vernir sur les 2 faces = 4)

$$\text{Or: } \frac{1}{4} \times 10 \text{ m}^2 = 25000 \text{ cm}^2.$$

Au total, comme $25000 > 24440$: l'ébéniste aura suffisamment de vernis pour toute la surface désirée.