

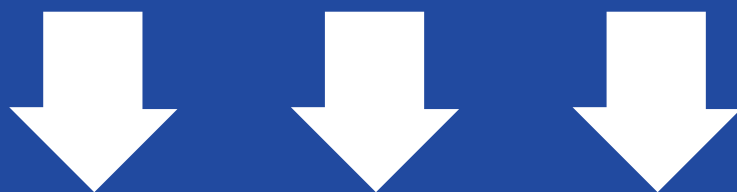
[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

**Calcul d'intégrales**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## CORRECTION

1. Calculons  $g'$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ :

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer sa dérivée sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ :  $g'(x) = 0 + 2 \cos x$ .

cad:  $g'(x) = 2 \cos x$ .

Ainsi pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ :  $g'(x) = 2 \cos x$ .

2. Déduisons-en la valeur de  $I$ :

$$\text{Ici: } I = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx.$$

Soit  $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$ .  $f$  est continue sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Elle admet donc des primitives

sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et par conséquent  $I$  existe.

$$I = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} \left( \frac{2 \cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} \frac{g'(x)}{g(x)} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \left[ \ln(g(x)) \right]_0^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \left[ \ln(1 + 2 \sin x) \right]_0^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \left( \ln \left( 1 + 2 \sin \frac{\pi}{2} \right) - \ln(1 + 2 \sin 0) \right)$$

cad:  $I = \frac{1}{2} \times (\ln(3) - 0).$

Ainsi:  $I = \frac{\ln(3)}{2}.$

3. a. Montrons que  $I + J = 1$ :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx + \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin(2x)}{1 + 2 \sin x} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2 \sin x} \right) dx. \end{aligned}$$

Or:  $\sin(2x) = 2 \sin x \times \cos x.$

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } \frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2 \sin x} &= \frac{\cos x + 2 \sin x \times \cos x}{1 + 2 \sin x} \\ &= \frac{\cos x (1 + 2 \sin x)}{1 + 2 \sin x} \end{aligned}$$

$$= \cos x.$$

$$\text{D'où: } I + J = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$= \left[ \sin x \right]_0^{\pi/2} \quad \text{cad: } I + J = 1.$$

Ainsi, nous avons bien:  $I + J = 1$ .

3. b. Déduisons-en la valeur de J:

Comme  $I + J = 1$  et  $I = \frac{\ln(3)}{2}$ , nous pouvons affirmer que:

$$J = 1 - \frac{\ln(3)}{2}.$$

$$\text{Ainsi: } J = 1 - \frac{\ln(3)}{2}.$$