

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT

6

CORRECTION

1. Montrons que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, $0 \leq x^2 \sin(x) \leq x^2$:

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, nous avons: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin(0) \leq \sin(x) \leq \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \times x^2 \leq x^2 \times \sin(x) \leq 1 \times x^2$$

$$\left(x^2 \geq 0, \text{ pour tout } x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \sin(x) \leq x^2.$$

Ainsi, pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, nous avons bien: $0 \leq x^2 \sin(x) \leq x^2$.

2. Dédisons-en que $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) \leq \frac{\pi^3}{24}$:

Posons pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$: $g(x) = 0$,

- $f(x) = x^2 \sin(x)$,

- $h(x) = x^2$.

Notons que:

- les fonctions g , f et h sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
- elles admettent donc des primitives sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et par conséquent:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx \text{ existent,}$$

- de plus, les fonctions g , f et h sont positives sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq x^2 \sin(x) \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \leq \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \leq \frac{\pi^3}{24}.$$

Au total un encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \leq \frac{\pi^3}{24}.$$