www.freemaths.fr

TLE Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE 4

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{(x-4)} + \dfrac{b}{(x-1)}$:

Pour tout $x \in [5;6]$: $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+4}$.

Préalablement, notons que: $(x-4) \times (x-1) = x^2-5x+4$.

Dans ces conditions: $f(x) = \dfrac{a}{(x-4)} + \dfrac{b}{(x-1)}$

$$\iff \frac{1}{x^2-5x+4} = \frac{a}{(x-4)} + \frac{b}{(x-1)}$$

$$\iff \frac{1}{x^2-5x+4} = \frac{a(x-1)+b(x-4)}{x^2-5x+4}$$

$$\iff 1 = (a+b)x + (-a-4b)$$

$$\iff \begin{cases} 0 = a+b \\ 1 = -a-4b \end{cases}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\text{cad: } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [5;6]$: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}}{(x-4)} + \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{(x-1)}$.

2. Calculons alors $I = \int_5^6 f(x)\,dx$:

Ici: $I = \int_5^6 \left(\dfrac{\frac{1}{3}}{(x-4)} + \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{(x-1)} \right) dx$.

Soit $f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}}{(x-4)} - \dfrac{\frac{1}{3}}{(x-1)}$. f est continue sur $[5;6]$. Elle admet donc des primitives sur $[5;6]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_5^6 \left(\frac{\frac{1}{3}}{(x-4)} - \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)} \right) dx \iff I = \frac{1}{3} \times \int_5^6 \frac{1}{(x-4)}\,dx - \frac{1}{3} \times \int_5^6 \frac{1}{(x-1)}\,dx$$

$$\iff I = \frac{1}{3} \times [\ln(x-4)]_5^6 - \frac{1}{3} \times [\ln(x-1)]_5^6$$

$$\iff I = \frac{1}{3} \times (\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{3} \times (\ln 5 - \ln 4)$$

$$\text{cad: } I = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 5 + \ln 4).$$

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi: $I = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 5 + \ln 4)$ ou $I = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[5;6]$:

La valeur moyenne de f sur $[5;6]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-5}\right) \times \int_5^6 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-5}\right) \times \left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)\right)$

cad: $\mu = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[5;6]$ est: $\mu = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$.

Freemaths : Tous droits réservés