www.freemaths.fr

Tle Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b, c ? ET VALEUR MOYENNE

1

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$:

Pour tout $x \in]\, 1 ; +\infty [$: $f(x) = \dfrac{2x^2}{3(x-1)^2}$.

Dans ces conditions: $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{3(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{3} = a(x^2 + 1 - 2x) + b(x-1) + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 = ax^2 + (-2a + b) + (a - b + c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} = a \\ -2a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

cad: $$\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]\,1\,; +\infty\,[$: $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3\,(x-1)} + \dfrac{2}{3\,(x-1)^2}$.

2. Calculons alors $I = \displaystyle\int_3^7 f(x)\,dx$:

Ici: $I = \displaystyle\int_3^7 \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3\,(x-1)} + \dfrac{2}{3\,(x-1)^2} \right) dx$.

Soit $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3\,(x-1)} + \dfrac{2}{3\,(x-1)^2}$. f est continue sur $[\,3\,; 7\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,3\,; 7\,]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_3^7 \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\,(x-1)} + \frac{2}{3\,(x-1)^2} \right) dx$$

$$\Longleftrightarrow \; I = \int_3^7 \frac{2}{3}\,dx + \int_3^7 \frac{4}{3\,(x-1)}\,dx + \int_3^7 \frac{2}{3\,(x-1)^2}\,dx$$

$$\iff I = \left[\frac{2}{3}x\right]_3^7 + \frac{4}{3}\left[\ln(x-1)\right]_3^7 + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{(x-1)}\right]_3^7$$

$$\iff I = \left(\frac{14}{3} - 2\right) + \frac{4}{3}\left(\ln(6) - \ln(2)\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

cad: $I = \frac{26}{9} + \frac{4}{3}\ln(3)$.

Ainsi: $I = \frac{26}{9} + \frac{4}{3}\ln(3)$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[3;7]$:

La valeur moyenne de f sur $[3;7]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{7-3}\right) \times \int_3^7 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{7-3}\right) \times \left(\frac{26}{9} + \frac{4}{3}\ln(3)\right)$

cad: $\mu = \frac{26}{36} + \frac{1}{3}\ln(3)$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[3;7]$ est: $\mu = \frac{26}{36} + \frac{1}{3}\ln(3)$.