T^LE Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 8

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur [- 4 ; 10]:

Ici: $f(x) = (x + 4)\, e^{-0,5x}$, pour tout $x \in [-4 ; 10]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[-4 ; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-4 ; 10]$:

- $f'(x) = (1) \times (e^{-0,5x}) + (x + 4) \times (-0,5\, e^{-0,5x})$

  $= (-0,5x - 1)\, e^{-0,5x}$.

- $f''(x) = (-0,5) \times (e^{-0,5x}) + (-0,5x - 1) \times (-0,5\, e^{-0,5x})$

  $= 0,25x\, e^{-0,5x}$.

Ainsi, pour tout $x \in [-4 ; 10]$:

$$f'(x) = (-0,5x - 1)\, e^{-0,5x} \quad \text{et} \quad f''(x) = 0,25x\, e^{-0,5x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$:

• **1er cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(-0,5x - 1)\,e^{-0,5x} \leqslant 0$ **cad ssi**: $x \geqslant -2$ $(e^{-0,5x} > 0)$.

• **2e cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $(-0,5x - 1)\,e^{-0,5x} \geqslant 0$ **cad ssi**: $x \leqslant -2$ $(e^{-0,5x} > 0)$.

Ainsi: • f est croissante sur $[-4; -2]$,

• f est décroissante sur $[-2; 10]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-4		-2		10
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(-4) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(-2) \Rightarrow b = 2e$,

• $c = f(10) \Rightarrow c = 14e^{-5}$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-4\,;\,10]$: $f''(x) = 0,25x\,e^{-0,5x}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ ssi: $0,25x \leqslant 0$ cad: $x \leqslant 0$,

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi: $0,25x \geqslant 0$ cad: $x \geqslant 0$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,5x} > 0$)

Ainsi: • f est concave sur $I = [-4\,;\,0]$,

• f est convexe sur $I' = [0\,;\,10]$.