

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

**Convexité & Concavité**



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. Calculons  $f'(x)$  et  $f''(x)$  sur  $[0, 7; 6]$ :

Ici:  $f(x) = (x^2 - 2x + 1) e^{-2x+6}$ , pour tout  $x \in [0, 7; 6]$ .

D'après l'énoncé  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0, 7; 6]$ .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer  $f'$  et  $f''$  pour tout  $x \in [0, 7; 6]$ :

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (2x - 2) \times (e^{-2x+6}) + (x^2 - 2x + 1) \times (-2 \times e^{-2x+6}) \\ &= (-2x^2 + 6x - 4) e^{-2x+6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-4x + 6) \times (e^{-2x+6}) + (-2x^2 + 6x - 4) \times (-2 \times e^{-2x+6}) \\ &= 2(2x^2 - 8x + 7) e^{-2x+6}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in [0, 7; 6]$ :

$$f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4) e^{-2x+6} \text{ et } f''(x) = 2(2x^2 - 8x + 7) e^{-2x+6}.$$

2. Étudions le sens de variation de  $f$  et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de  $f$ :

Préalablement, déterminons les racines de l'équation:  $-2x^2 + 6x - 4 = 0$ .<sup>2</sup>

$$\Delta = (2)^2 > 0.$$

D'où deux solutions:  $x' = 1$  et  $x'' = 2$ .

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0, 7; 6]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 \leq 0 \quad (e^{-2x+6} > 0)$$

$$\text{cad ssi: } x \in [0, 7; 1] \cup [2; 6]$$

• 2<sup>e</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 \geq 0 \quad (e^{-2x+6} > 0)$$

$$\text{cad ssi: } x \in [1; 2]$$

Ainsi: •  $f$  est décroissante sur  $[0, 7; 1] \cup [2; 6]$ ,

•  $f$  est croissante sur  $[1; 2]$ .

b. Tableau de variation de  $f$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	0,7	1	2	6	
$f'$	-	0	+	0	-
$f$	$a$	$b$	$c$	$d$	

Avec: •  $a = f(0,7) \Rightarrow a = \dots$ ,

•  $b = f(1) \Rightarrow b = 0$ ,

•  $c = f(2) \Rightarrow c = e^2$ ,

•  $d = f(6) \Rightarrow d = 25$ .

### 3. Étudions la convexité de la fonction $f$ :

D'après le cours: •  $f$  est concave sur un intervalle  $I$  ssi:

pour tout  $x \in I, f''(x) \leq 0$ .

•  $f$  est convexe sur un intervalle  $I'$  ssi:

pour tout  $x \in I', f''(x) \geq 0$ .

Or ici, pour tout  $x \in [0,7;6]$ :  $f''(x) = 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x+6}$ .

Soit l'équation:  $2x^2 - 8x + 7 = 0$ .

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 > 0.$$

D'où deux solutions:  $x' = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$  et  $x'' = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$ .

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0, 7; 6]$ , sachant que:

$$e^{-2x+6} > 0.$$

• 1<sup>er</sup> cas:  $f''(x) \geq 0$ .

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x+6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 \geq 0$$

$$\text{cad: } x \in \left[0, 7; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; 6\right]$$

• 2<sup>e</sup> cas:  $f''(x) \leq 0$ .

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x+6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 \leq 0$$

$$\text{cad: } x \in \left[\frac{4 - \sqrt{2}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right].$$

Ainsi: •  $f$  est convexe sur  $I' = \left[0, 7; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; 6\right]$ ,

•  $f$  est concave sur  $I = \left[\frac{4 - \sqrt{2}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right]$ .