

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[10; 50]$:

Ici: $f(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$, pour tout $x \in [10; 50]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[10; 50]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [10; 50]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= \frac{(0) \times (1 + e^{-0,25x+6}) - (90) \times (-0,25 e^{-0,25x+6})}{[1 + e^{-0,25x+6}]^2} \\ &= \frac{22,5 e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= \frac{(22,5 \times (-0,25) \times e^{-0,25x+6}) \times (1 + e^{-0,25x+6})^2}{[1 + e^{-0,25x+6}]^4} \\ &\quad - \frac{(22,5 e^{-0,25x+6}) \times [2 \times (1 + e^{-0,25x+6}) \times (-0,25 e^{-0,25x+6})]}{[1 + e^{-0,25x+6}]^4} \\ &= \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [10; 50]$:

$$f'(x) = \frac{22,5 e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2} \text{ et } f''(x) = \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Pour tout $x \in [10; 50]$: $f'(x) = \frac{22,5 e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2}.$

Comme pour tout $x \in [10; 50]$, $(1 + e^{-0,25x+6})^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $22,5 e^{-0,25x+6}$.


Or pour tout $x \in [10; 50]$: $e^{-0,25x+6} > 0$.

Dans ces conditions: $f'(x) > 0$, pour tout $x \in [10; 50]$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[10; 50]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	10	50
f'	+	
f		

Avec: • $a = f(10) \Rightarrow a = \frac{90}{1 + e^{3,5}}$,

• $b = f(50) \Rightarrow b = \frac{90}{1 + e^{-6,5}}$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout $x \in [10; 50]$: $f''(x) = \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [10; 50]$, sachant que: $e^{-0,25x+6} > 0$.

• 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0$.

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5,625 (e^{-0,25x+6} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,25x+6} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -0,25x+6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 24 \text{ cad } x \in [10; 24].$$

• 2^e cas: $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 5,625 (e^{-0,25x+6} - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,25x+6} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -0,25x + 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 24 \text{ cad } x \in [24; 50]$$

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [10; 24]$,

• f est concave sur $I = [24; 50]$.