

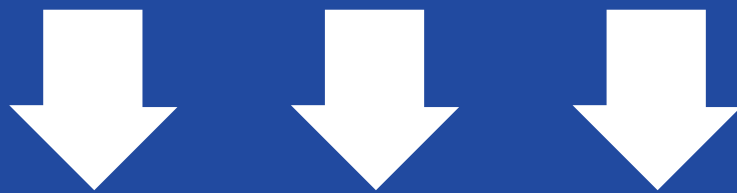
www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-4; 10]$:

Ici: $f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8)e^{-0,5x}$, pour tout $x \in [-4; 10]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[-4; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (-4x^2 - 10x + 8) \times (-0,5e^{-0,5x}) \\ &= (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (4x - 3) \times (e^{-0,5x}) + (2x^2 - 3x - 14) \times (-0,5e^{-0,5x}) \\ &= (4x - 3 - x^2 + \frac{3}{2}x + 7) \times e^{-0,5x} \\ &= \left(-x^2 + \frac{11}{2}x + 4\right) \times e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$f'(x) = (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x} \text{ et } f''(x) = \left(-x^2 + \frac{11}{2}x + 4\right) \times e^{-0,5x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Préalablement, déterminons les racines de l'équation: $2x^2 - 3x - 14 = 0$.

$$\Delta = (11)^2 > 0.$$

D'où deux solutions: $x' = -2$ et $x'' = 3,5$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 3x - 14 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \in [-2; 3,5] \quad (e^{0,5x} > 0).$$

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 3x - 14 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \in [-4; -2] \cup [3,5; 10] \quad (e^{0,5x} > 0).$$

Ainsi: • f est décroissante sur $[-2; 3,5]$,

• f est croissante sur $[-4; -2] \cup [3,5; 10]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-4	-2		3,5		10
f'		+	0	-	0	+
f		↗ b		↘ c		↗ d
	a					

- Avec:
- $a = f(-4) = 1 - 16e^2,$
 - $b = f(-2) = 1 + 12e,$
 - $c = f(3,5) = 1 - 76e^{\frac{7}{2}},$
 - $d = f(10) = 1 - 492e^{-5}.$

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout $x \in [-4; 10]$: $f''(x) = \left(-x^2 + \frac{11}{2}x + 4\right) x e^{-0,5x}.$

Soit l'équation: $-x^2 + \frac{11}{2}x + 4 = 0.$

$$\Delta = \frac{185}{4} > 0.$$

D'où deux solutions: $x' = \frac{1}{4}x(11 + \sqrt{185})$ et $x'' = \frac{1}{4}x(11 - \sqrt{185}).$

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$ sachant que: $e^{-0,5x} > 0.$

• 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0.$

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } -x^2 + \frac{11}{2}x + 4 \geq 0$$

$$\text{cad: } x \in \left[-\frac{\sqrt{185} - 11}{4}; \frac{\sqrt{185} + 11}{4} \right].$$

• 2^e cas: $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } -x^2 + \frac{11}{2}x + 4 \leq 0$$

$$\text{cad: } x \in \left[-4; -\frac{\sqrt{185} - 11}{4} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{185} + 11}{4}; 10 \right].$$

Ainsi: • f est convexe sur $I' = \left[-\frac{\sqrt{185} - 11}{4}; \frac{\sqrt{185} + 11}{4} \right]$,

• f est concave sur $I = \left[-4; -\frac{\sqrt{185} - 11}{4} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{185} + 11}{4}; 10 \right]$.