T^LE Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 3

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-10;2]$:

Ici: $f(x) = (2 - x)\,e^x$, pour tout $x \in [-10;2]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[-10;2]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-10;2]$:

- $f'(x) = (-1) \times (e^x) + (2 - x) \times (e^x)$

  $= (1 - x)\,e^x$.

- $f''(x) = (-1) \times (e^x) + (1 - x) \times (e^x)$

  $= -\,x e^x$.

Ainsi, pour tout $x \in [-10;2]$: $f'(x) = (1 - x)\,e^x$ et $f''(x) = -\,x e^x$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10;2]$:

• 1er cas : $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(1 - x) \leqslant 0$ cad ssi : $x \geqslant 1$ $(e^x > 0)$.

• 2e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $(1 - x) \geqslant 0$ cad ssi : $x \leqslant 1$ $(e^x > 0)$.

Ainsi : • f est croissante sur $[-10 ; 1]$,

• f est décroissante sur $[1 ; 2]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant :

x	-10		1		2
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec : • $a = 12\, e^{-10}$,

• $b = e$,

• $c = 0$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours : • f est concave sur un intervalle I ssi :

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi :

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-10; 2]$: $f''(x) = -xe^x$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ ssi: $x \geqslant 0$ cad: $x \in [0; 2]$,

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi: $x \leqslant 0$ cad: $x \in [-10; 0]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [-10; 0]$,

• f est concave sur $I = [0; 2]$.