www.freemaths.fr

TLE Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 14

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0;8]$:

Ici: $f(x)=\dfrac{0,4}{20\,e^{-x}+1}+0,4$, pour tout $x \in [0;8]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[0;8]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [0;8]$:

- $f'(x)=\dfrac{8\,e^{-x}}{(20\,e^{-x}+1)^2}$.
- $f''(x)=8\,e^{-x} \times \left[\dfrac{20\,e^{-x}-1}{(20\,e^{-x}+1)^3}\right]$.

Ainsi, pour tout $x \in [0;8]$:

$$f'(x)=\frac{8\,e^{-x}}{(20\,e^{-x}+1)^2} \quad \text{et} \quad f''(x)=8\,e^{-x} \times \left[\frac{20\,e^{-x}-1}{(20\,e^{-x}+1)^3}\right].$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Freemaths : Tous droits réservés

Pour tout $x \in [0;8]$: $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$.

Comme pour tout $x \in [0;8]$, $(20e^{-x}+1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $8e^{-x}$.

Or pour tout $x \in [0;8]$: $8e^{-x} > 0$.

Dans ces conditions: $f'(x) > 0$, pour tout $x \in [0;8]$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[0;8]$.

Freemaths : Tous droits réservés

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		8
f'		+	
f	a	↗	b

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = \dfrac{0,4}{21} + 0,4$,

• $b = f(8) \Rightarrow b = \dfrac{0,4}{20e^{-8}+1} + 0,4$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [0;8]$: $f''(x) = 8\,e^{-x} \times \left[\dfrac{20\,e^{-x} - 1}{(20\,e^{-x}+1)^3}\right]$.

Notons que pour tout $x \in [0;8]$: • $8\,e^{-x} > 0$

• $(20\,e^{-x}+1)^3 > 0$.

• 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $20\,e^{-x} - 1 \geqslant 0$

$\iff e^{-x} \geqslant \dfrac{1}{20}$

$\iff -x \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{20}\right)$

$\iff -x \geqslant -\ln(20)$

cad ssi: $x \leqslant \ln(20)$.

• 2e cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $20\,e^{-x} - 1 \leqslant 0$ cad ssi $x \geqslant \ln(20)$.

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [0; \ln(20)]$,

• f est concave sur $I = [\ln(20); 8]$.

Freemaths : Tous droits réservés