T^LE
Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 10

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0; 10]$:

Ici: $f(x) = \dfrac{1}{0,5 + 100\, e^{-x}}$, pour tout $x \in [0; 10]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[0; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [0; 10]$:

• $f'(x) = \dfrac{(0) \times (0,5 + 100\, e^{-x}) - (1) \times (-100\, e^{-x})}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^2}$

$$= \frac{100\, e^{-x}}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^2}.$$

• $f''(x) = \dfrac{(-100\, e^{-x}) \times (0,5 + 100\, e^{-x})^2}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^4}$

$$\frac{-(100\, e^{-x}) \times [2 \times (0,5 + 100\, e^{-x}) \times (-100\, e^{-x})]}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^4}$$

$$= \frac{100\, e^{-x} \times (100\, e^{-x} - 0,5)}{[0,5 + 100\, e^{-x}]^3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$:

$$f'(x) = \frac{100\,e^{-x}}{[0,5 + 100\,e^{-x}]^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{100\,e^{-x} \times (100\,e^{-x} - 0,5)}{[\,0,5 + 100\,e^{-x}\,]^3}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $f'(x) = \dfrac{100\,e^{-x}}{[0,5 + 100\,e^{-x}]^2}$.

Comme pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$, $[0,5 + 100\,e^{-x}]^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $100\,e^{-x}$.

Or pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $100\,e^{-x} > 0$.

Dans ces conditions: $f'(x) > 0$, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[\,0\,;\,10\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	10
f'	$+$	
f	a ↗	b

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = \dfrac{1}{100,5}$,

• $b = f(10) \Rightarrow b = \dfrac{1}{0,5 + 100\,e^{-10}}$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [\,0;\,10\,]$: $f''(x) = \dfrac{100\,e^{-x} \times (100\,e^{-x} - 0,5)}{[\,0,5 + 100\,e^{-x}\,]^3}$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0;\,10\,]$, sachant que:

• $100\,e^{-x} > 0$

• $[\,0,5 + 100\,e^{-x}\,]^3 > 0$.

• 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $100\,e^{-x} - 0,5 \geqslant 0$ cad ssi $x \leqslant \ln(200)$.

• 2e cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $100\,e^{-x} - 0,5 \leqslant 0$ cad ssi $x \geqslant \ln(200)$.

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [\,0;\,\ln(200)\,]$,

• f est concave sur $I = [\,\ln(200);\,10\,]$.