

www.freemaths.fr

TLE

# Technologique Mathématiques

« **ln** » : Dérivées & Limites



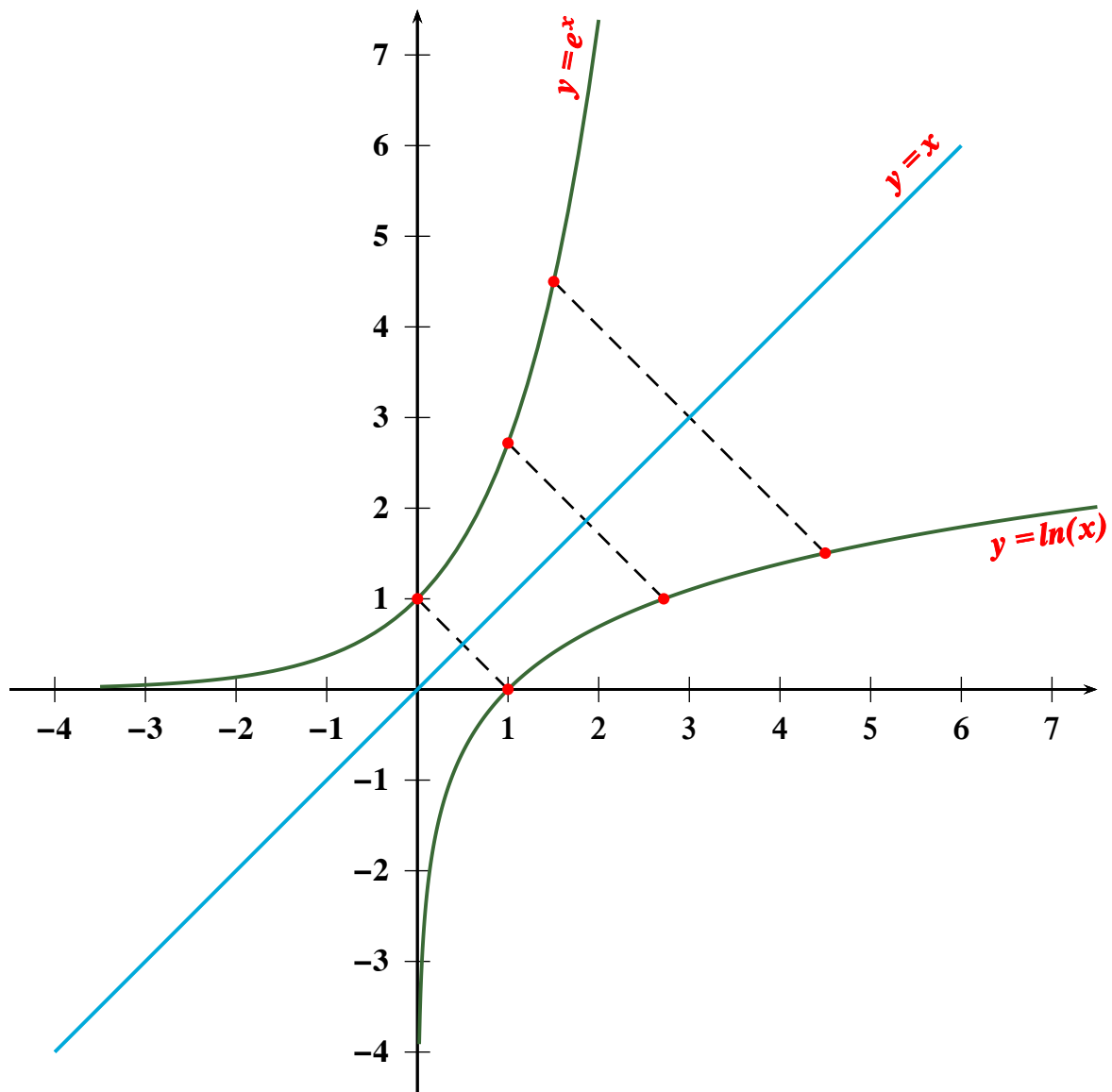
MINI COURS

# A. Représentation graphique de la fonction ln :

## 1. Remarque importante :

Les fonctions  $e^x$  et  $\ln(x)$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

## 2. Le graphique :



## B. Dérivées :

### 1. La dérivée de $f(x) = \ln(x)$ :

Soit  $f(x) = \ln(x)$ , la fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$

et pour tout  $x > 0$  :  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

### 2. La dérivée de $f(x) = \ln[U(x)]$ :

Soit  $f(x) = \ln[U(x)]$ , avec pour tout  $x \in I$ ,  $U(x) > 0$  :

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

## C. Tableau de variation de $\ln$ :

Comme  $x > 0$ ,  $\frac{1}{x} > 0$  et donc :  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

La fonction logarithme népérien est donc **strictement croissante sur  $]0; +\infty[$** .

Ainsi :

$x$	$0$	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$



En effet :  $\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$

## D. Limites à connaître :

### 1. Limites aux bornes :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

### 2. Théorème des croissances comparées :

Pour tout entier naturel non nul " n " :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.$

## E. Concavité de la fonction ln :

1.  $f(x) = \ln(x)$  est concave sur  $]0; +\infty[$  :

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$  et  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ .

2. Conséquence :

La courbe de la fonction "ln" est **au dessus de toutes ses tangentes**.