

www.freemaths.fr

TLE

# Technologique Mathématiques

«**ln**» : Études de fonctions



## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION

## Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on définit la fonction  $f$  par  $f(x) = x - \ln(x + 1)$ .

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. En déduire que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $\ln(x + 1) \leq x$ .

## Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$ . On admet que la suite de terme général  $u_n$  est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $u_2$ .
2.
  - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .
  - b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 1$ .
  - c. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
3. On note  $l$  la limite de la suite  $(u_n)$  et on admet que  $l = f(l)$  où  $f$  est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de  $l$ .
4.
  - a. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel  $p$  donné, permet de déterminer le plus petit rang  $N$  à partir duquel tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont inférieurs à  $10^{-p}$ .
  - b. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  à partir duquel tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont inférieurs à  $10^{-15}$ .