T^{LE} Technologique Mathématiques

Fonction inverse
Dérivées & Variations

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

TAUX DE VARIATION & DÉRIVÉE

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ quand $f(x) = \frac{1}{x}$:

Ici, il s'agit de calculer la dérivée de f, pour tout $x \in IR^*$.

D'après le cours: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

a. Le taux de variation entre x et $x + h$:

Ici: $x \in IR^*$ et $x + h \in IR^*$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\left(\frac{1}{x+h}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h) \times x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{-1}{x(x+h)}.$$

Ainsi, le taux de variation entre x et $x + h$ est : $\tau(h) = \dfrac{-1}{x\,(x + h)}$.

b. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x\,(x + h)} = \frac{-1}{x^2}.$$

D'où : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{-1}{x^2}$.

c. La dérivée de f, pour tout $x \in IR^*$:

Comme $\displaystyle\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{-1}{x^2}$ (nombre réel fini pour tout $x \in IR^*$) : f est dérivable sur IR^* et pour tout $x \in IR^*$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

2. Déduisons-en le sens de variation de f :

Ici, il s'agit de déterminer le sens de variation de la fonction f.

Cela revient à savoir si elle est croissante, décroissante ou constante.

- $\mathcal{D}_f = IR^*$
- Domaine de dérivabilité $= \mathcal{D}_{f'} = IR^*$
- $\tau(0) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Dans ces conditions, f est dérivable sur IR^* et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, pour tout $x \in IR^*$.

Comme $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ sur IR^*, f est strictement décroissante sur IR^*.