T^{LE} Technologique Mathématiques

Fonction inverse
Comportement aux Bornes

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

APPLICATION ÉCONOMIQUE 2

CORRECTION

PARTIE A: Etude mathématique

Ici: $f(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$, pour tout $x \in [30; 120]$.

1. a. Déterminons la dérivée de f :

Pour tout $x \in [30; 120]$: $f'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2}$.

1. b. Montrons qu'elle peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$:

Nous savons que pour tout $x \in [30; 120]$: $f'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2}$.

Or: $2 - \frac{7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$

$= \frac{2(x^2 - 3600)}{x^2}$

$= \frac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$. $[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2]$

Freemaths : Tous droits réservés

Donc pour tout réel $x \in [30 ; 120]$: $f'(x) = \dfrac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$.

2. Étudions les variations de f sur $[30 ; 120]$:

• **Étudions le signe de f' sur $[30 ; 120]$:**

Pour tout réel $x \in [30 ; 120]$: $f'(x) = \dfrac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$.

D'où le tableau de signe de f' sur $[30 ; 120]$, **sachant que $x^2 > 0$** :

x	30		60		120
$x - 60$		-	0	+	
$x + 60$		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	

Ainsi, le signe de f' sur $[30 ; 120]$ est :

- strictement négatif sur $[30 ; 60[$
- nul si $x = 60$
- strictement positif sur $]60 ; 120]$.

• **Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $[30 ; 120]$:**

Freemaths : Tous droits réservés

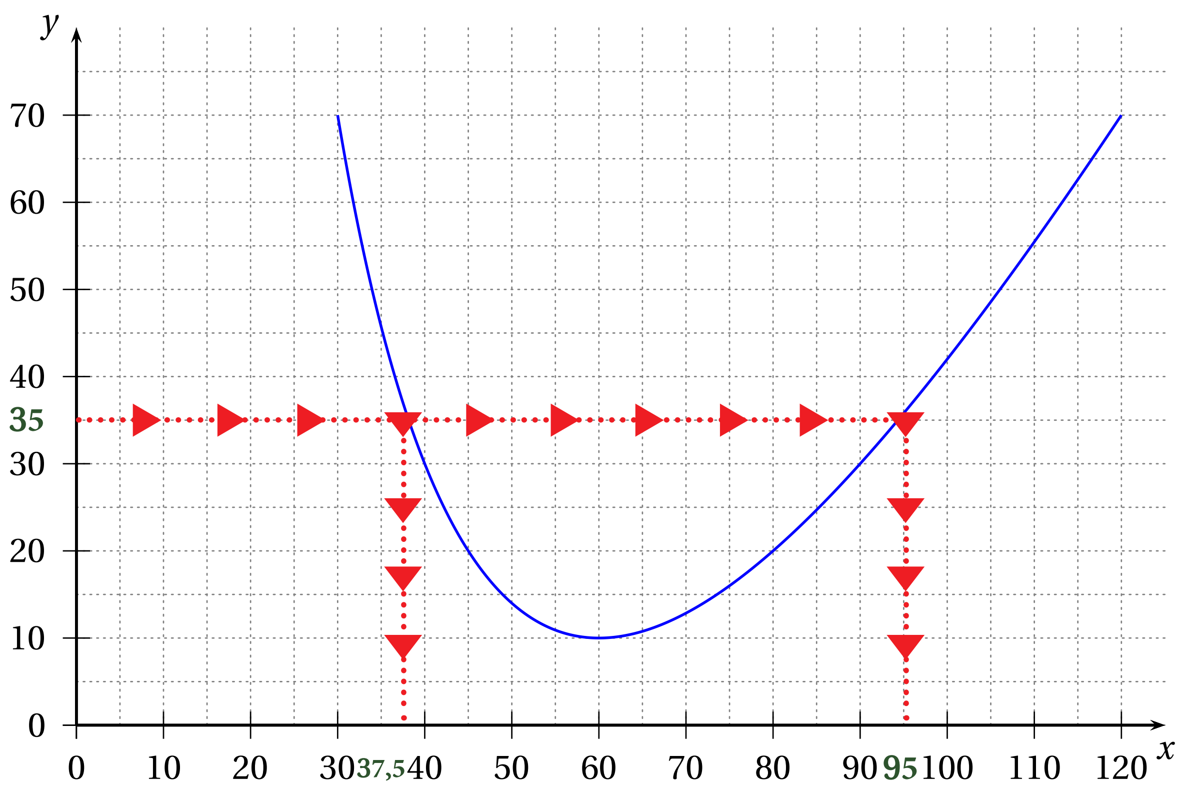
x	30		60		120
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	70	↘	10	↗	70

Ainsi: • f est décroissante sur [30 ; 60]

• f est croissante sur [60 ; 120].

3. Encadrons par deux entiers consécutifs les solutions de l'équation $f(x) = 35$:

Graphiquement les deux solutions de l'équation $f(x) = 35$ sont environ égales à: 37,5 et 95.



Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE B: Étude de coût

Ici: $CM(x) = 2x - 230 + \dfrac{7200}{x}$, pour tout $x \in [30; 120]$.

1. Déterminons le nombre de repas qui donne un coût moyen unitaire minimum:

D'après le tableau de variations de la fonction f sur $[30; 120]$ de la question **2.** de la **Partie A**, le nombre de repas qui donne un coût moyen unitaire minimum est égal à: 60.

Ainsi, le coût moyen unitaire est minimum quand:

- le nombre de repas est de 60
- $CM(60) = 10$.

2. Déterminons le coût total:

Nous savons que: $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

D'où: $C(x) = x \cdot CM(x)$ cad $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$.

Ainsi, le coût total est donné par la relation: $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$.

3. a. Calculons le bénéfice $B(x)$:

Nous savons que:
- le prix d'un repas est de 35 €,
- $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$.

D'où, le bénéfice $B(x)$ est: $B(x) = 35x - C(x)$

$$= 35x - 2x^2 + 230x - 7200$$

Freemaths : Tous droits réservés

$= -2x^2 + 265x - 7200.$

3. b. Déterminons combien de repas doivent être servis pour que le restaurateur réalise un bénéfice:

Le restaurateur réalisera un bénéfice ssi: **$B(x) > 0$.**

Or **$B(x) > 0$** à partir du moment où **$Cm(x) > CM(x)$.**

Ici: • $CM(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$

• $Cm(x) = 4x - 230$ **(car: $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$).**

D'où **$Cm(x) > CM(x)$** $\iff 4x - 230 > 2x - 230 + \frac{7200}{x}$

$\iff 2x > \frac{7200}{x}$

$\iff 2x^2 > 7200$ **cad $x > 60$.**

En conclusion pour réaliser un bénéfice: le restaurateur doit servir un nombre de repas strictement supérieur à 60.

Freemaths : Tous droits réservés