

www.freemaths.fr

TLE

# Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

« exp » : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. Donnons les valeurs de  $f(0)$  et  $f'(0)$ :

Nous avons: •  $f(0) = -2$  (A (0; -2))

•  $f'(0) = 10$  ( $y = 10x - 2$ ).

2. a. Déterminons  $f'$  pour tout réel de l'intervalle  $[0; 5]$ :

Ici: •  $f(x) = (ax - 2)e^{-x}$  (u x v)

•  $Df = [0; 5]$

•  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $[0; 5]$ .

Comme  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0; 5]$ , nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0; 5]$ .

Pour tout  $x \in [0; 5]$ :  $f'(x) = a x e^{-x} + (ax - 2) x (-e^{-x})$  ( $u' x v + u x v'$ )

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x} x (-ax + a + 2).$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 3]$ :  $f'(x) = e^{-x} x (-ax + a + 2)$ .

2. b. Déduisons-en que  $a = 8$ :

Nous savons que: •  $f'(0) = 10$

•  $f'(x) = e^{-x} x (-ax + a + 2)$ .

D'où:  $f'(0) = 10$  et  $f'(0) = a + 2$ .

En égalisant:  $a + 2 = 10 \Rightarrow a = 8$ .

Au total, nous avons bien:  $a = 8$ .

2. c. Donnons l'expression de  $f'$  en fonction de  $x$ :

Comme  $a = 8$ : pour tout  $x \in [0; 5]$ ,  $f'(x) = e^{-x} x (-8x + 10)$ .

3. a. Précisons le signe de  $f'$  sur l'intervalle  $[0; 5]$ :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout  $x \in [0; 5]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } e^{-x} x (-8x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10 = 0^*, \text{ cad: } x = 1,25.$$

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } e^{-x} x (-8x + 10) < 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10 < 0^*, \text{ cad: } x > 1,25 \text{ ou } x \in ]1,25; 5].$$

• 3<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } e^{-x} x (-8x + 10) > 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 10 > 0^*, \text{ cad: } x < 1,25 \text{ ou } x \in [0; 1,25[.$$

(\*: car pour tout  $x \in [0; 5]$ ,  $e^{-x} > 0$ )

Au total: •  $f$  est croissante sur  $[0; 1,25]$ ,

(car sur  $[0; 1,25]$ ,  $f'(x) \geq 0$ )

•  $f$  est décroissante sur  $[1,25; 5]$ .

( car sur  $[1,25; 5]$ ,  $f'(x) \leq 0$  )

3. b. Donnons le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; 5]$ :

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

$x$	0	1,25	5	
$f'$		+	0	-
$f$	$a$	$b$	$c$	

Diagramme du tableau de variation : une flèche pointe de  $a$  vers  $b$  et une autre pointe de  $b$  vers  $c$ .

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = -2,$

•  $b = f(1,25) \Rightarrow b = 8e^{-1,25},$

•  $c = f(5) \Rightarrow c = 38e^{-5}.$

3. c. Résolvons l'équation  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[0; 5]$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} x (8x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - 2 = 0 \quad (\text{car pour tout } x \in [0; 5]: e^{-x} > 0)$$

$$\Rightarrow x = 4.$$

Ainsi, l'équation  $f(x) = 0$  admet pour unique solution:  $x = 4$ .

4. a. Donnons l'expression de  $f''$ :

D'après le logiciel:  $g'(x) = e^{-x} x (8x - 18).$

Ainsi:  $f''(x) = e^{-x} x (8x - 18).$

#### 4. b. Déterminons la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand:  $x = \frac{9}{4}$  (logiciel).

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est:  $x = 2,25$ .

#### 5. a. Déterminons la quantité de grille-pains que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum:

D'après le tableau de variation que nous avons dressé, nous remarquons que  $f$ , cad le bénéfice, est maximum quand:  $x = 1,25$ .

Dans ces conditions le nombre de grille-pains qui permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal est: 1250.

#### 5. b. Déterminons le bénéfice maximal:

Le bénéfice maximal est atteint quand:  $x = 1,25$ .

Or:  $f(1,25) = 8 e^{-1,25}$ .

Dans ces conditions, le bénéfice maximal est:  $B_{\max} = 8 e^{-1,25} \times 100\,000 \text{ €}$ .

Au total, le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise est:

$$B_{\max} \approx 229\,204 \text{ €}.$$