

www.freemaths.fr

TLE

# Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

« exp » : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons, pour tout réel  $x$  de  $[0; 10]$ ,  $f'$ :

Ici: •  $f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 e^{-x}}$   $\left(\frac{u}{v}\right)$

•  $Df = [0; 10]$ .

Posons:  $f = \frac{f_1}{f_2 + f_3}$ , avec:  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = 0,5$

et:  $f_3(x) = 100 e^{-x}$ .

$f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

$f_3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

Par conséquent,  $h = f_2 + f_3$  est dérivable sur  $[0; 10]$  comme somme de 2 fonctions dérivables sur  $[0; 10]$ .

Enfin,  $f$  est dérivable sur  $[0; 10]$  comme quotient  $\left(\frac{f_1}{h}\right)$  de 2 fonctions dérivables sur  $[0; 10]$ , avec pour tout  $x \in [0; 10]$ ,  $h(x) \neq 0$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0; 10]$ .

Pour tout  $x \in [0; 10]$ :

$$f'(x) = \frac{0 \times (0,5 + 100 e^{-x}) - 1 \times (-100 e^{-x})}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} \quad \left( \frac{u'xv - uxv'}{[v]^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{100 e^{-x}}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} > 0.$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 10]$ :  $f'(x) = \frac{100 e^{-x}}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} > 0.$

2. a. Montrons l'équivalence demandée:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0; 10]: \quad 100 e^{-x} - 0,5 \geq 0 &\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{0,5}{100} \\ &\Leftrightarrow -x \geq \ln\left(\frac{0,5}{100}\right) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\ln\left(\frac{0,5}{100}\right) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\ln(0,005). \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 10]$ , nous avons bien:

$$100 e^{-x} - 0,5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\ln(0,005).$$

2. b. Déduisons-en le tableau de signes de  $f''$  sur  $[0; 10]$ :

Ici:  $f''(x) = \frac{100 e^{-x} \times (100 e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100 e^{-x})^3}$

•  $Df = [0; 10]$ .

Or pour tout  $x \in [0; 10]$ :  $100 e^{-x} > 0$  et  $(0,5 + 100 e^{-x})^3 > 0$ .

Le signe de  $f''$  dépend donc du signe de:  $100 e^{-x} - 0,5$ .

Or:  $100 e^{-x} - 0,5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\ln(0,005) \Leftrightarrow x \leq \ln(200).$

D'où le tableau de signes de  $f''$  sur  $[0; 10]$  suivant:

$x$	0	$\ln(200)$	10
$f''$	+	0	-

3. Montrons que  $C_f$  admet un point d'inflexion noté  $I$ :

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand:  $x = \ln(200)$ .

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est:  $x = \ln(200)$ .

D'où:  $I(\ln(200); f(\ln(200)))$ .

4. Déterminons l'intervalle sur lequel  $f$  est concave:

Soit  $[e; f]$ , l'intervalle recherché.

$f$  est concave sur  $[e; f]$  ssi: pour tout  $x \in [e; f]$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

Or le signe de  $f''$  dépend du signe de:  $100 e^{-x} - 0,5$ .

Et:  $100 e^{-x} - 0,5 \leq 0$  ssi  $x \in [\ln(200); 10]$ .

Au total:  $f$  est concave sur  $[e; f] = [\ln(200); 10]$ .

## Partie B:

1. a. Calculons  $f(10)$  en arrondissant au centième:

$$f(10) = \frac{1}{0,5 + 100 e^{-10}} \Rightarrow f(10) \approx 1,98^\circ\text{C}.$$

Au total:  $f(10) \approx 1,98 \text{ }^\circ\text{C}$ .

1. b. Déduisons-en qu'en 2150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté:

Nous avons:  $f(10) \approx 1,98 \text{ }^\circ\text{C} < 2 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Or:  $10 = 10 \times 25 \text{ ans}$ , cad: 250 ans.

Et:  $250 \text{ ans} + 1900 = 2150$ .

Ainsi: en 2150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté car en 2150 la température aura augmenté de  $1,98 \text{ }^\circ\text{C}$ , ne dépassant pas de plus de  $2 \text{ }^\circ\text{C}$  celle de 1900.

2. a. Déterminons l'année correspondante au point d'inflexion I:

Cela revient à calculer:  $x_1 = \ln(200)$ .

$\ln(200) \approx 5,30 \Rightarrow x_1 \approx 5,30$ .

Or:  $5,30 \times 25 \text{ ans} \approx 132,50 \text{ ans}$ .

Et:  $132,50 \text{ ans} + 1900 \approx 2032$ .

Ainsi, l'année correspondante au point I est: 2032.

2. b. Calculons le nombre de degrés Celsius supplémentaire en 2032 par rapport à 1900:

Cela revient à calculer:  $f(x_1)$ , cad:  $f(\ln(200))$ .

$$f(\ln(200)) = \frac{1}{0,5 + 100 \times \frac{1}{200}} \Rightarrow f(\ln(200)) = 1 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ainsi: en 2032, il y aura  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  supplémentaire par rapport à 1900.

3. a. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la température climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion  $I$ .

Or, nous savons que sur  $[0; 10]$  donc sur  $[x_1; 10]$ , la fonction  $f$  est strictement croissante car sur cet intervalle  $f' > 0$  (d'après 1.)

**Donc:** il est faux de dire qu'après 2033 ( $x_1$ ), la température climatique diminuera.

3. b. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la vitesse du réchauffement climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion  $I$ .

Or, sur  $[x_1; 10]$ , la fonction  $f$  est concave (d'après 4.)

**Donc:** il est vrai de dire qu'après 2033 ( $x_1$ ), la vitesse du réchauffement climatique diminuera.

4. Déterminons l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de  $+1,5$  °C:

Il s'agit ici de déterminer la valeur de " $x$ " telle que:  $f(x) = 1,5$ .

$$f(x) = 1,5 \Leftrightarrow \frac{1}{0,5 + 100 e^{-x}} = 1,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} + 150 e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 + 600 e^{-x} = 4$$

$$\Leftrightarrow 600 e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 600$$

$$\Rightarrow x = \ln(600) \text{ ou } x \approx 6,40.$$

Or:  $6,40 \times 25 \text{ ans} = 160 \text{ ans}$ .

Et:  $160 \text{ ans} + 1900 = 2060$ .

Ainsi, l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de  $+1,5^\circ\text{C}$  est: 2060.