T^{LE} Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE 14

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons en justifiant la valeur de $f'(-2)$:

D'après l'énoncé: la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A $(-2\,;f(-2))$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Cela justifie le fait que: $f'(-2) = 0$.

Notons aussi que le point A est le maximum de f sur $[-4\,;\,10]$.

2. A l'aide du graphique, déterminons le signe de $f'(4)$:

A l'aide du graphique, nous remarquons qu'à partir du point A d'abscisse $x = -2$ et jusqu'au point d'abscisse $x = 10$, la courbe ($\mathscr{C}$) décroît.

Par conséquent, entre ces deux points f est décroissante.

Or: $x = 4 \in\,]-2\,;\,10]$.

Donc nous pouvons affirmer que: $f'(4) < 0$.

3. A l'aide du graphique, déterminons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire S:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire S du domaine compris entre la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$, est telle que: $3 < S < 4$.

Au total, l'aire demandée S est telle que: $3 < S < 4$ u. a.

Partie B:

1. a. Montrons que $f'(x) = (-0,5x - 1)\, e^{-0,5x}$:

Ici: • $f(x) = (x + 4)\, e^{-0,5x}$ **(u x v)**

• $Df = [-4 ; 10]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = (x + 4)$ et $f_2(x) = e^{-0,5x}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 10]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 10]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-4 ; 10]$ comme produit **($f_1 \times f_2$)** de 2 fonctions dérivables sur $[-4 ; 10]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-4 ; 10]$.

Pour tout $x \in [-4 ; 10]$:

$f'(x) = (1) \times e^{-0,5x} + (x + 4) \times (-0,5) \times e^{-0,5x}$ **(u' x v + u x v')**

$\Rightarrow f'(x) = (-0,5x - 1)\, e^{-0,5x}$.

Au total, pour tout $x \in [-4 ; 10]$: $f'(x) = (-0,5x - 1)\, e^{-0,5x}$.

1. b. Étudions le sens de variation de f sur $[-4 ; 10]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-4 ; 10]$:

• **1^{er} cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-0,5x - 1)\, e^{-0,5x} = 0$

<=> $-0,5x - 1 = 0^*$, cad: $x = -2$.

• **$2^{ème}$ cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-0,5x - 1)\, e^{-0,5x} < 0$

<=> $-0,5x - 1 < 0^*$, cad: $x > -2$ ou $x \in]-2\,;\,10]$.

• **$3^{ème}$ cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-0,5x - 1)\, e^{-0,5x} > 0$

<=> $-0,5x - 1 > 0^*$, cad: $x < -2$ ou $x \in [-4\,;\,-2[$.

(*: car pour tout x de $[-4\,;\,10]$, $e^{-0,5x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[-4\,;\,-2]$,

(car sur $[-4\,;\,-2]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[-2\,;\,10]$.

(car sur $[-2\,;\,10]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	-4		-2		10
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(-4)$ => $a = 0$,

• $b = f(-2)$ => $b = 2e$,

• $c = f(10)$ => $c = 14e^{-5}$.

1. c. Montrons que sur [1 ; 6] l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur [a ; b].

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de [a ; b] tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à [a ; b].

• Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur [a ; b], l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à [a ; b].

Ici: • f est continue sur [1 ; 6].

• " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(6) = 10e^{-3}$

et: $f(1) = 5e^{-0,5}$.

• f est strictement décroissante sur [1 ; 6], car strictement décroissante sur] -2 ; 10].

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet une unique solution α appartenant à [1 ; 6].

Au total: $f(x) = 1,5$ admet exactement une solution unique α sur $[1; 6]$.

1. d. Donnons une valeur approchée à 10^{-2} de α:

Par tâtonnement, nous trouvons: $\alpha \approx 3,11$.

Au total: $\alpha \approx 3,11$.

2. a. Étudions la convexité de la fonction f sur $[-4; 10]$:

Ici: • $f(x) = (x+4)\,e^{-0,5x}$

• $Df = [-4; 10]$

• $f''(x) = 0,25x\,e^{-0,5x}$.

Or: • f est convexe ssi: $f''(x) \geqslant 0$,

• f est concave ssi: $f''(x) \leqslant 0$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$, sachant que: $e^{-0,5x} > 0$.

• **1^er cas**: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $0,25x \geqslant 0$, cad: $x \geqslant 0$ ou $x \in [0; 10]$.

• **2^ème cas**: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $0,25x \leqslant 0$, cad: $x \leqslant 0$ ou $x \in [-4; 0]$.

Au total: • f est convexe sur $[0; 10]$ et est strictement convexe sur $]0; 10]$,

• f est concave sur $[-4; 0]$ et est strictement concave sur $[-4; 0[$.

2. b. Déduisons-en que la courbe ($\mathcal{C}$) admet un unique point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = 0$.

Ainsi, les coordonnées du point d'inflexion sont: $I\,(0 ; f(0))$ cad $I\,(0 ; 4)$.

3. a. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur [- 4 ; 10]:

Sur l'intervalle [- 4 ; 10], il suffit de montrer que: $F'(x) = f(x)$.

3. b. Calculons S:

Ici, il s'agit de calculer: $S = \int_2^4 f(x)\,dx$

cad: $S = \int_2^4 (x + 4)\,e^{-0,5x}\,dx$.

f est continue sur [2 ; 4], elle admet donc des primitives sur [2 ; 4] et par conséquent: S existe.

$$S = \int_2^4 f(x)\,dx$$

$$= [\,F(x)\,]_2^4$$

$$= [\,(-2x - 12)\,e^{-0,5x}\,]_2^4 \quad \text{(d'après l'énoncé)}$$

=> $S = -20 \times e^{-2} + 16 \times e^{-1}$ ou $S \approx 3,18$ (valeur arrondie au centième).

Au total: $S \approx 3,18$ u. a.