

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

« exp » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. a. Etudions le signe de f' sur $[0; 1]$:

Ici: • $f(x) = (1-x)e^{3x}$

• $Df = [0; 1]$

• $f'(x) = (-3x + 2)e^{3x}$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[0; 1]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-3x + 2)e^{3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 = 0^*, \text{ cad: } x = \frac{2}{3}.$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-3x + 2)e^{3x} < 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 < 0^*, \text{ cad: } x > \frac{2}{3} \text{ ou } x \in \left] \frac{2}{3}; 1 \right].$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-3x + 2)e^{3x} > 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2 > 0^*, \text{ cad: } x < \frac{2}{3} \text{ ou } x \in \left[0; \frac{2}{3} \right[.$$

(*: car pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{3x} > 0$)

- Au total:**
- f est croissante sur $\left[0; \frac{2}{3}\right]$,
(car sur $\left[0; \frac{2}{3}\right]$, $f'(x) \geq 0$)
 - f est décroissante sur $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$.
(car sur $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$, $f'(x) \leq 0$)

1. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[0; 1]$, en précisant les valeurs utiles:

- Comme nous l'avons déjà dit:
- f est croissante sur $\left[0; \frac{2}{3}\right]$,
 - f est décroissante sur $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0	$\frac{2}{3}$	1
f'	+	0	-
f	<p>The diagram shows a peak at $x = \frac{2}{3}$. An arrow points from a at $x=0$ up to b at $x = \frac{2}{3}$. Another arrow points from b down to c at $x=1$.</p>		

- Avec:
- $a = f(0) \Rightarrow a = 1$,
 - $b = f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{3}e^2$,
 - $c = f(1) \Rightarrow c = 0$.

2. Déterminons les coordonnées du point d'inflexion:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Nous savons que: $f''(x) = 3(1 - 3x)e^{3x}$.

Or, pour tout x de $[0; 1]$: $e^{3x} > 0$.

D'où: $f''(x) = 0$ ssi $3(1 - 3x) = 0$, cad: $x = \frac{1}{3}$.

Au total, les coordonnées du point d'inflexion sont: $\left(\frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ cad $\left(\frac{1}{3}; \frac{2e}{3}\right)$.

Partie B:

1. Vérifions que les points A (1; 0) et B (0; 1) sont des points communs aux courbes Cf et Cg:

- Le point A (1; 0) est commun aux courbes Cf et Cg ssi:

$$\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ g(x_A) = y_A \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} (1 - x_A) e^{3x_A} = 0 \\ x_A^2 - 2x_A + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}.$$

$$\text{Or: (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 1) e^{3 \times 1} = 0 \\ 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}.$$

- Le point B (0; 1) est commun aux courbes Cf et Cg ssi:

$$\begin{cases} f(x_B) = y_B \\ g(x_B) = y_B \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} (1 - x_B) e^{3x_B} = 1 \\ x_B^2 - 2x_B + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{(II)}.$$

$$\text{Or: (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-0)e^{3 \times 0} = 1 \\ 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B = 1 \\ y_B = 1 \end{cases}.$$

Au total: les points A et B sont communs aux courbes Cf et Cg.

2. a. Justifions que pour tout x dans $[0; 1]$, $e^{3x} - 1 \geq 0$:

Pour tout $x \in [0; 1]$, nous avons:

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow e^0 \leq e^{3x} \leq e^3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^{3x} \leq e^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq e^{3x} - 1 \leq e^3 - 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{3x} - 1 \leq e^3 - 1 \text{ ou } e^{3x} - 1 \geq 0.$$

Au total, pour tout $x \in [0; 1]$: $e^{3x} - 1 \geq 0$.

2. b. Déduisons-en que pour tout x dans $[0; 1]$, $e^{3x} - 1 + x \geq 0$:

Pour tout $x \in [0; 1]$, nous avons:

$$\bullet x \geq 0 \quad (1)$$

$$\bullet e^{3x} - 1 \geq 0 \quad (2)$$

En additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2), nous obtenons:

$$(1) + (2) \Leftrightarrow x + e^{3x} - 1 \geq 0 \Rightarrow e^{3x} - 1 + x \geq 0.$$

Au total, pour tout $x \in [0; 1]$: $e^{3x} - 1 + x \geq 0$.

2. c. Etudions le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0; 1]$:

$$f(x) - g(x) = (1 - x)(e^{3x} - 1 + x).$$

Comme $e^{3x} - 1 + x \geq 0$, le signe de $f(x) - g(x)$ dépend du signe de " $1 - x$ ".

Or, pour tout $x \in [0; 1]$, $1 - x \geq 0$.

Dans ces conditions: pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) - g(x) \geq 0$.

Au total, le signe de $f(x) - g(x)$, pour tout x dans $[0; 1]$ est:

positif ou nul.

3. a. Calculons $I = \int_0^1 g(x) dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx$.

g est continue sur $[0; 1]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 1]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}.$$

Au total: $I = \frac{1}{3}$.

3. b. Calculons l'aire S , en arrondissant au dixième:

Ici, il s'agit de calculer: $S = \int_0^1 (1 - x)(e^{3x} - 1 + x) dx$.

Les fonctions f et g sont continues sur $[0; 1]$, et donc la fonction $f - g$ est continue sur $[0; 1]$. $f - g$ admet donc des primitives sur $[0; 1]$ et par conséquent: S existe.

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx$$

$$= \frac{e^3 - 4}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{e^3 - 7}{9} \text{ cad } I \approx 1,5 \text{ u. a.}, \text{ en arrondissant au dixième.}$$

Au total: $S \approx 1,5 \text{ u. a.}$