Spé Maths
Terminale

Trigonométrie : Généralités

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SINUS $\frac{\pi}{5}$

CORRECTION

Calculons $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$:

Nous savons que: $\pi = 5 \times \frac{\pi}{5}$.

Dans ces conditions:

$$\sin(\pi) = \sin\left(5 \times \frac{\pi}{5}\right) = 16\sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20\sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Or: $\sin(\pi) = 0$.

D'où: $16\sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20\sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$

$\iff 16X^5 - 20X^3 + 5X = 0 \quad (1).$ $\left(\text{en posant } X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

Comme $X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, l'équation (1) peut s'écrire:

$$16X^4 - 20X^2 + 5 = 0 \quad (2).$$

En posant: $Z = X^2$, $(2) \iff 16Z^2 - 20Z + 5 = 0 \quad (3).$

Le Δ de l'équation (3) est: $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 16 \times 5 = 80 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation (3) admet deux racines distinctes: • $Z_1 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}$

• $Z_2 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}$.

Or: $X^2 = Z \iff \begin{cases} X^2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} \\ X^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} X = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} \\ X = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}. \end{cases}$

Nous devons donc choisir entre $X = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $X = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ car $X > 0$.

Au total, nous retiendrons:

$$X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \text{ car } \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4} \text{ cad } \frac{1}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$