Spé Maths
Terminale

Trigonométrie : Généralités

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RELATION COS $(2x)$ ET COS^2 (x) ?

CORRECTION

1. Déduisons-en la relation entre $\cos^2(x)$ et $\cos(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

D'après le cours, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Dans ces conditions: $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$

$\iff \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\iff \cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.

2. Déterminons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

Nous avons:
- $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
- $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Or: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Ainsi: • $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$,

• $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}$.

3. Déterminons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$:

Nous avons: • $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

• $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.

Or: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$.

Ainsi: • $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

• $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

4. Trouvons la relation entre $\cos(2x)$ et $\sin^2(x)$:

Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: • $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

• $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Dans ces conditions: $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

$<=> \quad 1 - \sin^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

$<=> \quad 2 - 2\sin^2(x) = 1 + \cos(2x)$

$<=> \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.