

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Trigonométrie :
Généralités



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COSINUS ET SINUS DE $\frac{\pi}{8}$ DE DEUX FAÇONS !

CORRECTION

1. Rappelons les relations entre $\cos(2x)$ et ... :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

- $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

2. Déduisons-en $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$:

D'après la question précédente, nous pouvons déduire que pour tout réel x :

- $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$

- $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$

3. Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ de deux façons différentes :

Première façon :

Nous avons :

- $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\bullet \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Or: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Ainsi: $\bullet \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$,

$$\bullet \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

Seconde façon:

Nous avons: $\bullet \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\bullet \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Or: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Ainsi: • $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}},$

• $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}.$