Spé Maths
Terminale

Trigonométrie : Généralités

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COSINUS ET SINUS DE $\frac{\pi}{12}$?

CORRECTION

1. Rappelons les relations entre cos $(2x)$ et ...:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: • $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

• $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

2. Calculons alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

Nous avons: • $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

• $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Or: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.

Ainsi: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$.

3. Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$:

Nous avons: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.

Donc:
- $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$
- $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Or: $\cos(x - y) = \cos(x) \times \cos(y) + \sin(x) \times \sin(y)$.

D'où: $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Et: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Ainsi: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$ cad $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Or: $\sin(x - y) = \sin(x) \times \cos(y) - \cos(x) \times \sin(y)$.

D'où: $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Et: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Ainsi: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$ cad $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4. Les résultats des questions 2. et 3. sont-ils égaux ?

Pour répondre à cette question, nous allons tout élever au carré.

- $\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(6+2+2\sqrt{12}) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

- $\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(6+2-2\sqrt{12}) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Au total: les résultats sont bien les mêmes.