Spé Maths
Terminale

Trigonométrie : Généralités

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COSINUS ET SINUS DE $\frac{7\pi}{12}$?

CORRECTION

1. Rappelons les relations entre $\cos(2x)$ et ...:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

2. Calculons alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

Nous avons:
- $$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\pi - \left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

- $\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Or: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) > 0$.

Ainsi: • $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$,

• $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$.

3. Montrons que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$:

Nous avons: $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

Donc: • $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

• $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

▲ Or: $\cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y)$.

D'où: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Et: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ cad $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

▲ Or: $\sin(x+y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$.

D'où: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Et: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ cad $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

4. Les résultats des questions 2. et 3. sont-ils égaux ?

Pour répondre à cette question, nous allons tout élever au carré.

• $\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(2 + 6 - 2\sqrt{12}\right)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

• $\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(2 + 6 + 2\sqrt{12}\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Au total: les résultats sont bien les mêmes.