

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Fonctions  
Cosinus & Sinus



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# RESTREINDRE L'ÉTUDE À UN INTERVALLE

3

## CORRECTION

1. Montrons que  $f$  est  $2\pi$ -périodique:

D'après le cours, soient  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $T > 0$  un nombre réel tel que si  $x \in I$ , alors  $x + T \in I$ .

$f$  est dite **périodique de période  $T$**  si:  $f(x + T) = f(x)$ .

Notons qu'ici: si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $x + T \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Ici: } f(x + 2\pi) &= \cos(2(x + 2\pi)) + 2 \sin(x + 2\pi) \\
 &= \cos(2x + 4\pi) + 2 \sin(x + 2\pi) \\
 &= \cos(2x + 2\pi + 2\pi) + 2 \sin(x + 2\pi) \\
 &= \cos(2x + 2\pi) + 2 \sin(x) \\
 &= \cos(2x) + 2 \sin(x) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ : la fonction  $\cos(2x) + 2 \sin(x)$  est donc bien périodique de période  $2\pi$ .

2.  $f$  est-elle paire ? impaire ?

D'après le cours, une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $I$ , symétrique par rapport à "0", est<sup>2</sup>

- paire ssi pour tout  $x \in I$ :  $f(-x) = f(x)$ ,
- impaire ssi pour tout  $x \in I$ :  $f(-x) = -f(x)$ .

Notons qu'ici: l'ensemble de définition  $\mathbb{R}$  est bien symétrique par rapport à "0".

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(2(-x)) + 2 \sin(-x) \\ &= \cos(-2x) - 2 \sin(x) \\ &= \cos(2x) - 2 \sin(x). \end{aligned}$$

Or:

- $f(x) = \cos(2x) + 2 \sin(x)$
- $-f(x) = -\cos(2x) - 2 \sin(x)$ .

Donc:  $f(-x) \neq f(x)$  et  $f(-x) \neq -f(x)$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $f$  n'est ni paire, ni impaire.

3. Déterminons l'intervalle sur lequel on peut étudier le sens de variation de  $f$ :

Comme  $f$  est  $2\pi$ -périodique: on peut réduire l'intervalle d'étude de la fonction à l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

4. Calculons  $f'$ :

$f$  est dérivable sur  $[-\pi; \pi]$ .

Dans ces conditions, pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -2 \sin(2x) + 2 \cos(x) \\
 &= -4 \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x) \\
 &= 4 \cos(x) \left[ \frac{1}{2} - \sin(x) \right].
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ :  $f'(x) = 4 \cos(x) \left[ \frac{1}{2} - \sin(x) \right]$ .

5. a. Dressons le tableau de signes de  $f'$ :

Nous avons le tableau de signes de  $f'$  suivant:

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$			
$\cos(x)$	-	0	+	+	0	-			
$\frac{1}{2} - \sin(x)$	+	+	0	-	-	0	+		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

5. b. Déduisons-en le sens de variation de  $f$ :

Sur  $[-\pi; \pi]$ , nous avons:  $\bullet f'(x) \leq 0$  sur  $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$ .

$\bullet f'(x) \geq 0$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ .

Ainsi: •  $f$  est décroissante sur  $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$ .

•  $f$  est croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ .