Spé Maths
Terminale

Équations & Inéquations Trigonométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATIONS DU 1er DEGRÉ ... 7

CORRECTION

1. **Résolvons dans $I = [\,0\,;\,3\pi\,]$, l'équation $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$.**

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} \iff \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. , k \in \mathbb{Z}.$$

$$\iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 2x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{-5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

1er cas: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Comme $x \in [\,0\,;\,3\pi\,]$, nous avons: $0 \leqslant x \leqslant 3\pi \iff 0 \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant 3\pi$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\iff \frac{-\pi}{4} \leqslant k\pi \leqslant 3\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\iff \frac{-1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{11}{4}$$

$$\iff k \in \left[\frac{-1}{4} ; \frac{11}{4}\right].$$

" **k** " étant un entier relatif, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$ ssi $k = 0, 1, 2.$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est: $S_1 = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} + \pi ; \frac{\pi}{4} + 2\pi\right\}$

cad: $S_1 = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4}\right\}.$

2e cas: $x = \frac{-5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Comme $x \in [\, 0 ; 3\pi \,]$, nous avons: $0 \leqslant x \leqslant 3\pi \iff 0 \leqslant \frac{-5\pi}{12} + k\pi \leqslant 3\pi$

$$\iff \frac{5\pi}{12} \leqslant k\pi \leqslant 3\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\iff \frac{5}{12} \leqslant k \leqslant \frac{41}{12}$$

$$\iff k \in \left[\frac{5}{12} ; \frac{41}{12}\right].$$

" **k** " étant un entier relatif, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$ ssi: $k = 1, 2, 3.$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est:

Freemaths : Tous droits réservés

$$S_2 = \left\{ \frac{-5\pi}{12} + \pi \,;\, \frac{-5\pi}{12} + 2\pi \,;\, \frac{-5\pi}{12} + 3\pi \right\}$$

cad: $S_2 = \left\{ \frac{7\pi}{12} ; \frac{19\pi}{12} ; \frac{31\pi}{12} \right\}$.

En conclusion, l'ensemble des solutions est:

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4} ; \frac{7\pi}{12} ; \frac{19\pi}{12} ; \frac{31\pi}{12} \right\}.$$

2. Résolvons dans $I = [\, 0 ; 2\pi \,]$, l'équation $2 \sin(4x) = \sqrt{3}$:

$$2 \sin(4x) = \sqrt{3} \iff \sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \sin(4x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 4x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

1er cas: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Comme $x \in [\, 0 ; 2\pi \,]$, nous avons: $0 \leqslant x \leqslant 2\pi \iff 0 \leqslant \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \leqslant 2\pi$

$$\iff \frac{-\pi}{12} \leqslant \frac{k\pi}{2} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{12}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\iff \frac{-1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{23}{6}$$

$$\iff k \in \left[\frac{-1}{6}; \frac{23}{6}\right].$$

" k " étant un entier relatif, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ssi: $k = 0, 1, 2, 3.$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est:

$$S_1 = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + \pi; \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right\}$$

cad: $S_1 = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}\right\}.$

2^e cas: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Comme $x \in [\,0; 2\pi\,]$, nous avons: $0 \leqslant x \leqslant 2\pi \iff 0 \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leqslant 2\pi$

$$\iff \frac{-\pi}{6} \leqslant \frac{k\pi}{2} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\iff \frac{-1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{11}{3}$$

$$\iff k \in \left[\frac{-1}{3}; \frac{11}{3}\right].$$

" k " étant un entier relatif, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ssi: $k = 0, 1, 2, 3.$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est:

Freemaths : Tous droits réservés

$$S_2 = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6} + \pi ; \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right\}$$

cad: $$S_2 = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{19\pi}{6} \right\}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions est:

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12} ; \frac{13\pi}{12} ; \frac{19\pi}{12} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{6} ; \frac{19\pi}{6} \right\}.$$

3. Résolvons dans $I = [-\pi ; \pi]$, l'équation $\cos(-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

Freemaths : Tous droits réservés

$$\cos(-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(-2x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff -2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } -2x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{-\pi}{12} - k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

1er cas: $x = \frac{-\pi}{12} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Comme $x \in [-\pi ; \pi]$, nous avons: $-\pi \leq x \leq \pi \iff -\pi \leq \frac{-\pi}{12} - k\pi \leq \pi$

$$\iff -\pi + \frac{\pi}{12} \leq -k\pi \leq \pi + \frac{\pi}{12}$$

$$\iff \frac{-11\pi}{12} \leq -k\pi \leq \frac{13\pi}{12}$$

$$\iff \frac{-13}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}$$

$$\iff k \in \left[\frac{-13}{12}; \frac{11}{12}\right].$$

" **k** " étant un entier relatif, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ssi $k = -1, 0$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est: $S_1 = \left\{\frac{-\pi}{12} + \pi ; \frac{-\pi}{12}\right\}$

cad: $S_1 = \left\{\frac{11\pi}{12} ; \frac{-\pi}{12}\right\}$.

2

2e cas: $x = \frac{\pi}{12} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Comme $x \in [-\pi ; \pi]$, nous avons: $-\pi \leqslant x \leqslant \pi \iff -\pi \leqslant \frac{\pi}{12} - k\pi \leqslant \pi$

$$\iff -\pi - \frac{\pi}{12} \leqslant -k\pi \leqslant \pi - \frac{\pi}{12}$$

$$\iff \frac{-13\pi}{12} \leqslant -k\pi \leqslant \frac{11\pi}{12}$$

$$\iff \frac{-11}{12} \leqslant k \leqslant \frac{13}{12}$$

$$\iff k \in \left[\frac{-11}{12}; \frac{13}{12}\right].$$

" **k** " étant un entier relatif, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ssi: $k = 0, 1$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est: $S_2 = \left\{\frac{\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} - \pi\right\}$

Freemaths : Tous droits réservés

cad: $S_2 = \left\{ \frac{\pi}{12} ; \frac{-11\pi}{12} \right\}.$

En conclusion, l'ensemble des solutions est:

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{11\pi}{12} ; \frac{-\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{-11\pi}{12} \right\}.$$

Freemaths : Tous droits réservés