Spé Maths
Terminale

Équations & Inéquations Trigonométriques

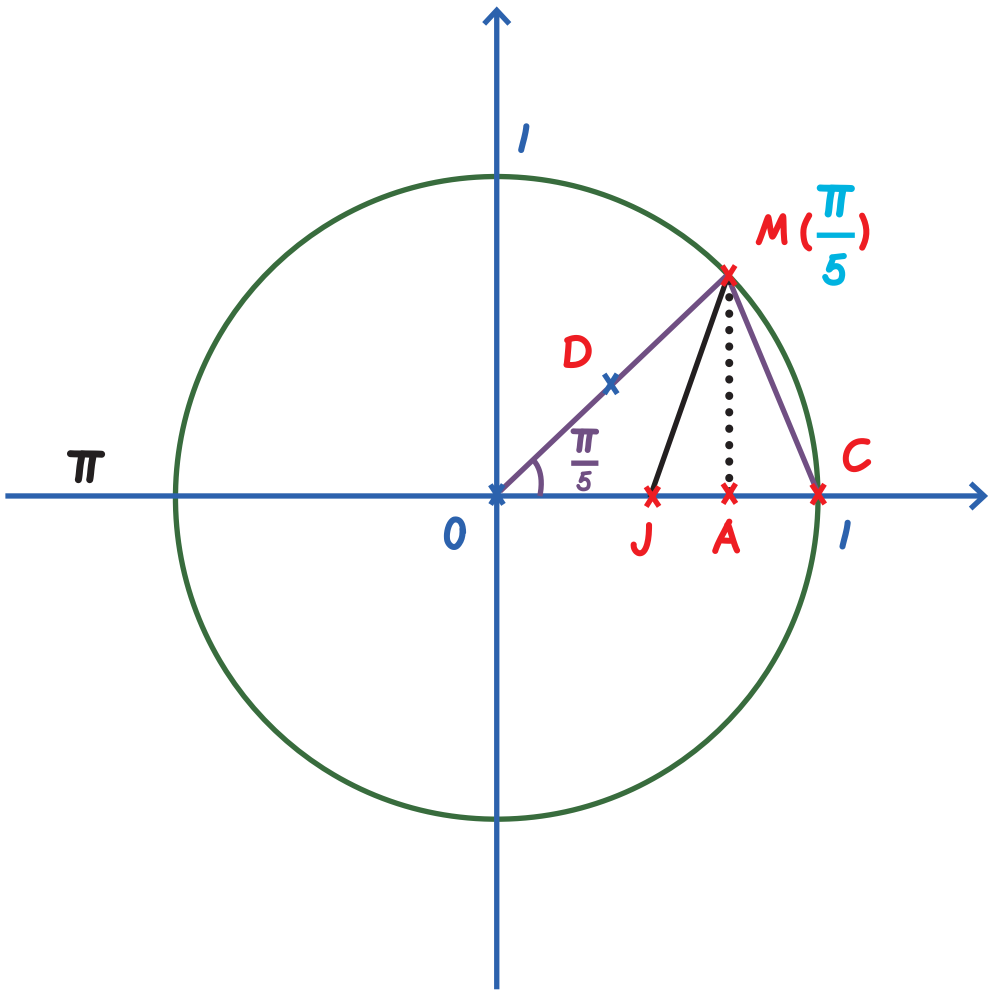
CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ET $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ GÉOMÉTRIQUEMENT ...

CORRECTION

1. Traçons un cercle trigonométrique et plaçons les points demandés:

Nous avons le cercle trigonométrique suivant:



Notons que:
- Un triangle isocèle est un triangle qui a **deux côtés égaux**.
- De plus, un triangle isocèle a **deux angles de même mesure**.

2.a. Montrons que $AC = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$:

Nous avons:
- $OA = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- $OA = 1$.

D'où: $AC = OC - OA$ cad $AC = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

b. Déduisons-en que $OJ = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$:

Nous avons:
- $AC = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- $OC = 1$.

D'où: $OJ = 1 - 2\,AC$ cad $OJ = 1 - 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$.

c. Démontrons que $OJ = \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$:

Soit le point D tel que la droite (JA) est une hauteur du triangle OJM.

Nous avons:
- $OD = \frac{1}{2}\,OM$
- $OM = 1$.

De plus: $\cos(\widehat{COM}) = \dfrac{OD}{OJ} = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

D'où: $OJ = \dfrac{OD}{\cos(\widehat{COM})}$ cad $OJ = \dfrac{1}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)}$.

d. Écrivons l'équation déduite des questions précédentes:

Nous avons: • $OJ = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1$ (b.)

• $OJ = \dfrac{1}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)}$. (c.)

Or: $OJ = OJ$.

D'où: $2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1 = \dfrac{1}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)} \iff 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$.

En posant $X = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, nous obtenons l'équation du second degré suivante:

$$4X^2 - 2X - 1 = 0.$$

3. Calculons alors $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$:

Pour ce faire, nous devons résoudre l'équation: $4X^2 - 2X - 1 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) = 20 = 2\sqrt{5} > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes qui sont:

$$X' = \frac{-(-2) - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{-(-2) + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Comme ici $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$.

Or: $X' < 0$ et $X'' > 0$.

Donc nous retiendrons comme unique solution: $X = X'' = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

D'où: $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Dans ces conditions: $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 1$

$$\iff \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$\iff \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\left(x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ et donc } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0\right)$$

Au total: • $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

• $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.