

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites Géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SUITE À PARTIR D'UNE SUITE...

5

CORRECTION

1. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique:

Nous savons que pour tout entier naturel n : • $U_{n+1} = 2U_n + 1$

• $V_n = U_n + 1.$

Dans ces conditions: $U_{n+1} = 2U_n + 1 \Leftrightarrow U_{n+1} + 1 = (2U_n + 1) + 1$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = 2(U_n + 1)$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = 2V_n.$$

Ainsi: la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_1 = U_1 + 1 = 2.$

1. b. Donnons l'expression de V_n en fonction de n :

Comme (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme

$$V_1 = 2: V_n = 2 \times (2)^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (V_n = V_1 \times q^{(n-1)})$$

1. c. Déduisons-en U_n pour tout entier naturel $n \geq 1$:

Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $V_n = U_n + 1 \Leftrightarrow U_n = V_n - 1.$

D'où: $U_n = 2 \times (2)^{(n-1)} - 1$ ou $U_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}^*.$

2. Déterminons le sens de variation de (U_n) :

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (2^{(n+1)} - 1) - (2^n - 1) \\ &= 2^{(n+1)} - 2^n \\ &= 2 \times (2^n) - 2^n \\ &= 2^n \times (2 - 1) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Comme $U_{n+1} - U_n = 2^n > 0$: la suite (U_n) est strictement croissante sur \mathbb{N}^* .

3. Conjecturons la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 1).$$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$

Donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$: la suite (U_n) est divergente.