

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites Arithmétiques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SOMME ET SENS DE VARIATION

CORRECTION

1. Exprimons U_n en fonction de n et r :

a. $U_{n+1} = U_n + 10, U_0 = 1$:

Ici: $U_0 = 1$ et $r = 10$.

D'où: $U_n = 1 + 10n$.

b. $U_{n+1} = U_n - 7, U_0 = 10$:

Ici: $U_0 = 10$ et $r = -7$.

D'où: $U_n = 10 - 7n$.

c. $U_n = U_{n-1} + 3, U_0 = 1$:

Ici: $U_0 = 1$ et $r = 3$.

D'où: $U_n = 1 + 3n$.

d. $U_n = U_{n-1} - 4, U_2 = 7$:

Ici: $U_2 = 7$ et $r = -4$.

D'où: $U_n = 7 - 4 \times (n - 2)$ cad $U_n = 15 - 4n$.

e. $U_n = U_{n-1} + 1, U_3 = 6$:

Ici: $U_3 = 6$ et $r = 1$.

D'où: $U_n = 6 + 1 \times (n - 3)$ cad $U_n = 3 + n$.

f. $U_{n+1} = U_n, U_1 = 3$:

Ici: $U_1 = 3$ et $r = 0$.

D'où: $U_n = 3 + 0 \times (n - 1)$ cad $U_n = 3$.

2. Calculons les n premiers termes:

D'après le cours, soit une suite arithmétique (U_n) de raison r :

- si U_0 est le premier terme, pour tout entier naturel non nul n :

$$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n + 1) \times \left[\frac{U_0 + U_n}{2} \right].$$

- pour tous entiers naturels n et p :

$$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = \frac{(n - p + 1) \times (U_p + U_n)}{2}.$$

a. $U_{n+1} = U_n + 10, U_0 = 1$:

Ici: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n + 1) \times \left[\frac{1 + U_n}{2} \right]$

$$= (n + 1) \times \left[\frac{1 + (1 + 10n)}{2} \right], \text{ car } U_n = 1 + 10n.$$

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1) \times (5n+1)$.

b. $U_{n+1} = U_n - 7$, $U_0 = 10$:

Ici: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1) \times \left[\frac{10 + U_n}{2} \right]$
 $= (n+1) \times \left[\frac{10 + (10 - 7n)}{2} \right]$, car $U_n = 10 - 7n$.

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1) \times \left(-\frac{7n}{2} + 10 \right)$.

c. $U_n = U_{n-1} + 3$, $U_0 = 1$:

Ici: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1) \times \left[\frac{1 + U_n}{2} \right]$
 $= (n+1) \times \left[\frac{1 + (1 + 3n)}{2} \right]$, car: $U_n = 1 + 3n$.

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1) \times \left(\frac{3n}{2} + 1 \right)$.

d. $U_n = U_{n-1} - 4$, $U_2 = 7$:

Ici: $U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n = (n-2+1) \times \left[\frac{U_2 + U_n}{2} \right]$
 $= (n-1) \times \left[\frac{7 + (15 - 4n)}{2} \right]$, car:

- $U_2 = 7$
- $U_n = 15 - 4n$.

D'où: $U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n = (n-1) \times (11 - 2n)$.

e. $U_n = U_{n-1} + 1$, $U_3 = 6$:

$$\text{Ici: } U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_n = (n - 3 + 1) \times \left[\frac{U_3 + U_n}{2} \right]$$

$$= (n - 2) \times \left[\frac{6 + (3 + n)}{2} \right], \text{ car: } \begin{cases} \bullet U_3 = 6 \\ \bullet U_n = 3 + n. \end{cases}$$

$$\text{D'où: } U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_n = (n - 2) \times \left(\frac{9 + n}{2} \right).$$

$$\text{f. } U_{n+1} = U_n, U_1 = 3:$$

$$\text{Ici: } U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = (n - 1 + 1) \times \left[\frac{U_1 + U_n}{2} \right]$$

$$= n \times \left[\frac{3 + (3)}{2} \right], \text{ car } U_1 = 3 \text{ et } U_n = 3.$$

$$\text{D'où: } U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = 3n.$$

3. Déterminons le sens de variation:

D'après le cours, soit une suite arithmétique (U_n) définie sur \mathbb{N} et de raison r :

- si $r > 0$: (U_n) est croissante sur \mathbb{N}
- si $r < 0$: (U_n) est décroissante sur \mathbb{N}
- si $r = 0$: (U_n) est constante sur \mathbb{N} .

$$\text{a. } U_{n+1} = U_n + 10, U_0 = 1:$$

Ici: (U_n) est une suite arithmétique définie sur \mathbb{N} et de raison $r = 10$.

Comme $r = 10 > 0$: (U_n) est croissante sur \mathbb{N} .

b. $U_{n+1} = U_n - 7, U_0 = 10:$

Ici: (U_n) est une suite arithmétique définie sur \mathbb{N} et de raison $r = -7$.

Comme $r = -7 < 0$: (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

c. $U_n = U_{n-1} + 3, U_0 = 1:$

Ici: (U_n) est une suite arithmétique définie sur \mathbb{N} et de raison $r = 3$.

Comme $r = 3 > 0$: (U_n) est croissante sur \mathbb{N} .

d. $U_n = U_{n-1} - 4, U_2 = 7:$

Ici: (U_n) est une suite arithmétique définie sur \mathbb{N} et de raison $r = -4$.

Comme $r = -4 < 0$: (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

e. $U_n = U_{n-1} + 1, U_3 = 6:$

Ici: (U_n) est une suite arithmétique définie sur \mathbb{N} et de raison $r = 1$.

Comme $r = 1 > 0$: (U_n) est croissante sur \mathbb{N} .

f. $U_{n+1} = U_n, U_1 = 3:$

Ici: (U_n) est une suite arithmétique définie sur \mathbb{N} et de raison $r = 0$.

Comme $r = 0$: (U_n) est constante ou stationnaire sur \mathbb{N} .