

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites Arithmétiques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SOMME DES n PREMIERS CARRÉS

CORRECTION

1. Rappelons la formule permettant le calcul de S_1^n :

D'après le cours, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Calculons $S_3^{n+1} - S_3^n$:

$$\begin{aligned} S_3^{n+1} - S_3^n &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \\ &= (n+1)^3, \text{ pour tout entier naturel } n \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi: $S_3^{n+1} - S_3^n = (n+1)^3$.

3. Montrons que $S_3^{n+1} - S_3^n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$:

Nous savons que: $S_3^{n+1} - S_3^n = (n+1)^3$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$$\text{Or: } (n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2$$

$$= (n+1)(n^2 + 1 + 2n)$$

$$= n^3 + n + 2n^2 + n^2 + 1 + 2n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n \geq 1.$$

Ainsi, nous avons bien: $S_3^{n+1} - S_3^n = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

4. Déduisons-en que $S_3^{n+1} = S_3^n + 3 S_2^n + 3 S_1^n + n + 1$:

Nous venons de montrer que: $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

D'où nous pouvons écrire: $n^3 = (n - 1)^3 + 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1$

$$(n - 1)^3 = (n - 2)^3 + 3(n - 2)^2 + 3(n - 2) + 1$$

$$(n - 2)^3 = (n - 3)^3 + 3(n - 3)^2 + 3(n - 3) + 1$$

⋮

$$1^3 = 0^3 + 3(0)^2 + 3(0) + 1.$$

Dans ces conditions, en additionnant membre à membre les égalités précédentes, nous obtenons:

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 + n^3 + (n - 1)^3 + \dots + 1^3 &= [n^3 + (n - 1)^3 + (n - 2)^3 + \dots + 1^3 + 0^3] \\ &\quad + 3 \times [n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \dots + 1^2 + 0^2] \\ &\quad + 3 \times [n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 + 0] \\ &\quad + n \times 1 + 1, \text{ pour tout entier naturel } n \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons: $S_3^{n+1} = S_3^n + 3 \times S_2^n + 3 \times S_1^n + (n + 1)$.

5. Que vaut alors S_2^n ?

Nous savons que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $S_3^{n+1} = S_3^n + 3 S_2^n + 3 S_1^n + (n + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } S_2^n &= \frac{1}{3} \left(S_3^{n+1} - S_3^n - 3 S_1^n - n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left((n + 1)^3 - \frac{3n(n + 1)}{2} - n - 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ pour tout entier naturel } n \geq 1.$$

Au total: $S_2^n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$