Spé Maths
Terminale

Suites Arithmétiques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

1 SUITE, 2 SOMMES

CORRECTION

1. Exprimons U_n en fonction de n, pour tout entier naturel n:

Ici: (U_n) a pour raison $r = 4$ et premier terme $U_0 = 7$.

D'où, pour tout entier naturel n: $U_n = 7 + 4n$ ou $U_{n+1} = U_n + 4$, avec $U_0 = 7$.

2. a. Justifions que $U_0 + U_1 + ... + U_{20} = U_0 \times 21 + r\,(1 + 2 + ... + 20)$:

$$\begin{aligned} U_0 + U_1 + ... + U_{20} &= U_0 + (U_0 + r) + (U_1 + r) + (U_2 + r) + ... + (U_{19} + r) \\ &= U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2\,r) + (U_0 + 3\,r) + ... + (U_0 + 20\,r) \\ &= U_0 \times 21 + r\,(1 + 2 + 3 + ... + 20). \end{aligned}$$

Ainsi: $U_0 + U_1 + ... + U_{20} = U_0 \times 21 + r\,(1 + 2 + 3 + ... + 20)$.

2. b. Déduisons-en la valeur de cette somme:

D'après le cours, nous savons que: $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Dans ces conditions: $$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + 20 &= \frac{20 \times 21}{2} \\ &= 210. \end{aligned}$$

De plus: $U_0 = 7$ et $r = 4$.

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{20} = 7 \times 21 + 4 \times 210 = 987$.

3. a. **Calculons $U_0 + U_1 + ... + U_{100}$:**

D'après le cours, soit une suite arithmétique (U_n) de raison r et de premier terme U_0, pour tout entier naturel non nul n:

$$U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n + 1) \times \left[\frac{U_0 + U_n}{2}\right].$$

D'où ici: $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{100} = 101 \times \left[\frac{7 + (7 + 4 \times 100)}{2}\right] = 20907$.

(car: $U_0 = 7$ et $U_n = 7 + 4n$)

3. b. **Calculons $U_{50} + U_{51} + U_{52} + ... + U_{100}$:**

D'après le cours, soit une suite arithmétique (U_n), alors pour tous entiers naturels n et p:

$$U_p + U_{p+1} + ... + U_n = \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2}.$$

D'où: $U_{50} + U_{51} + U_{52} + ... + U_{100} = (100 - 50 + 1) \times \left[\frac{(7 + 4 \times 50) + (7 + 4 \times 100)}{2}\right]$

$= 15657$.

(car: $U_n = 7 + 4n$)