Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE FORÊT VIEILLISSANTE

CORRECTION

1. a. Déterminons le nombre d'arbres en 2014:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 5\%)\ U_0 + 3000 \iff U_1 = 0,95 \times 50000 + 3000$

$\Rightarrow U_1 = 50500$ arbres.

Ainsi, en 2014, il y aura: 50500 arbres dans la forêt.

1. b. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,95\ U_n + 3000$:

• D'après l'énoncé, la forêt dispose de: 50000 arbres en 2013.

D'où: $U_0 = 50000$.

• De plus, chaque année 5% des arbres sont détruits et 3000 arbres sont replantés.

Soient: • U_{n+1}, le nombre d'arbres au cours de l'année (2013 + (n + 1)),

• U_n, le nombre d'arbres au cours de l'année (2013 + (n)).

Pour tout entier naturel n, le nombre d'arbres " U_{n+1} " est égal au nombre d'arbres " U_n " diminué de 5% et augmenté de 3000 " nouveaux arbres replantés ".

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 5\%\ U_n + 3000 \Rightarrow U_{n+1} = 0,95\ U_n + 3000.$

2. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = - U_n + 60000 \iff V_{n+1} = - U_{n+1} + 60000$

$\iff V_{n+1} = - (0,95\ U_n + 3000) + 60000 \quad (1).$

Or: $V_0 = - U_0 + 60000 \Rightarrow V_0 = 10000$ et $U_n = - V_n + 60000.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = - (0,95\ [- V_n + 60000] + 3000) + 60000$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,95\ V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $V_0 = 10000.$

2. b. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,95\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,95)^n$, avec: $V_0 = 10000.$

2. c. Déduisons-en que pour tout entier n, $U_n = 10000\ [6 - (0,95)^n]$:

Nous savons que: * $V_n = 10000 \times (0,95)^n$

* $U_n = - V_n + 60000.$

D'où: $U_n = - 10000 \times (0,95)^n + 60000,$

ou: $U_n = 10000\ [- (0,95)^n + 6] \Rightarrow U_n = 10000\ [6 - (0,95)^n].$

2. d. Déterminons la limite de (U_n):

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 10000\ [6 - (0,95)^n]$

$= 10000 \times [6]$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,95)^n = 0,$ car: $0,95 \in]-1, 1[.$

Au total: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 60000.$

2. e. Interprétation:

Cela signifie que dans n années (" n " très grand), la forêt vieillissante contiendra 60 000 arbres.

3. a. Résolvons $U_n \geqslant 57000$:

$$U_n \geqslant 57000 \iff 10000\,(6 - (0,95)^n) \geqslant 57000$$
$$\iff -(0,95)^n \geqslant -0,3$$
$$\iff n\ln(0,95) \leqslant \ln(0,3)$$
$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,3)}{\ln(0,95)}, \quad \text{car} \quad 0,95 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,95) < 0$$
$$\Rightarrow n \geqslant 23,5.$$

Nous prendrons $n = 24$ car n est un entier naturel.

3. b. Interprétation du résultat:

Cela signifie que dans 24 ans, cad à partir de 2037, la forêt vieillissante contiendra plus de 57 000 arbres.

4. a. Précisons l'algorithme qui convient:

Nous retiendrons l'algorithme n°3.

En effet, il est le seul à commencer par demander à l'utilisateur la valeur de n, puis à afficher U_0, puis les $(n - 1)$ valeurs suivantes de la suite.

L'instruction " Afficher " qui se trouve en dehors de la boucle permet d'afficher le dernière valeur calculée U_n.

4. b. Interprétons le résultat obtenu:

Lorsque $A = 57000$, l'algorithme 1 affiche 24.

Cela signifie qu'à l'issue de la 24e année, le nombre d'arbres dans la forêt aura atteint 57 000.