Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UN PETIT CAFÉ !

CORRECTION

1. Déterminons le pourcentage de réduction:

Soit x le pourcentage de réduction dont bénéficie Antoine.

x est tel que: $60\text{ €} = (1 - x) \times (150 \times 0,60\text{ €})$

$\Longleftrightarrow\ 60 = (1 - x) \times 90$

$\Longleftrightarrow\ \dfrac{2}{3} = 1 - x$ cad: $x = \dfrac{1}{3} \approx 33,33\%$.

Ainsi le pourcentage de réduction proposé à Antoine est de: 33,33%.

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,9\,U_n + 24000$:

• D'après l'énoncé, le 1er janvier 2017 il y a 60 000 utilisateurs.

D'où: $U_0 = 60\,000$ utilisateurs.

• De plus, chaque mois, on note que:

- 10% des propriétaires cessent d'utiliser la machine à café,
- et, 24 000 nouveaux utilisateurs débarquent.

Soient: • U_{n+1}, le nombre d'utilisateurs de cette machine à café " n+1 " mois après le 1er janvier 2017,

- U_n, le nombre d'utilisateurs de cette machine à café " n " mois après le 1er janvier 2017.

Pour tout entier naturel n, le nombre d'utilisateurs de cette machine à café " n+1 " mois après le 1er janvier 2017 est égal à celui U_n diminué de 10% et augmenté de 24000 nouveaux utilisateurs.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n - 10\% \times U_n + 24000 \text{ cad: } U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 24000.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 24000$.

2. b. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$V_n = U_n - 240000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 240000$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff V_{n+1} = (0,9 \times U_n + 24000) - 240000 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 240000 \Rightarrow V_0 = 60000 - 240000 = -180000$

et $U_n = V_n + 240000$.

Alors: $(1) \iff V_{n+1} = (0,9\,[\,V_n + 240000\,] + 24000) - 240000$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,9\, V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = -180000$.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,9\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (0,9)^n$ cad: $V_n = -180000 \times (0,9)^n$.

3. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_n = -180000 \times (0,9)^n + 240000$:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: * $V_n = -180000 \times (0,9)^n$

* $U_n = V_n + 240000$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -180000 \times (0,9)^n + 240000$.

4. Déterminons le nombre de mois demandés:

Nous allons déterminer " n " $\in \mathbb{N}$ tel que: $U_n > 230000$.

$U_n > 230000 \iff -180000 \times (0,9)^n + 240000 > 230000$

$\iff (0,9)^n < \dfrac{1}{18}$

$\iff n \cdot \ln(0,9) < -\ln(18)$

$\iff n > \dfrac{-\ln(18)}{\ln(0,9)}$, car: $0,9 \in]0; 1[$

$\Rightarrow n > 28$ mois, car n est un entier naturel.

En conclusion: au bout de 28 mois (après le 1er janvier 2017), le nombre d'utilisateurs de la machine à café dépassera pour la première fois 230000.

5. Que pensons-nous de cette affirmation ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -180000 \times (0,9)^n + 240000$

$= 240000$ utilisateurs car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0$, car: $0,9 \in]0;1[$.

Cela signifie, qu'au bout de n mois (" n " très grand), le nombre d'utilisateurs de la machine à café se stabilisera autour de 240000.

Donc jamais, on dépassera 240000 utilisateurs.

Au total, cette affirmation est donc: fausse !