Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UN PANIER BIO

CORRECTION

1. Calculons U_1 et U_2:

Il s'agit de calculer U_1 et U_2.

- $U_1 = 0,8\ U_0 + 18 \iff U_1 = 0,8 \times 65 + 18 \Rightarrow U_1 = 70$.
- $U_2 = 0,8\ U_1 + 18 \iff U_2 = 0,8 \times 70 + 18 \Rightarrow U_2 = 74$.

Ainsi, les valeurs respectives de U_1 et U_2 sont: $U_1 = 70$ et $U_2 = 74$.

2. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$V_n = U_n - 90 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 90$

$\iff V_{n+1} = (0,8\ U_n + 18) - 90 \quad (1)$.

Or: $V_0 = U_0 - 90 \Rightarrow V_0 = 65 - 90 = -25$ et $U_n = V_n + 90$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,8\,[V_n + 90] + 18) - 90$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,8\,V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = -25$.

2. b. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = 90 - 25 \times 0,8^n$:

Nous savons que: * $V_n = -25 \times (0,8)^n$ (d'après le cours)

$* \ U_n = V_n + 90.$

D'où: $U_n = -25 \times (0,8)^n + 90$ ou: $U_n = 90 - 25 \times (0,8)^n$.

3. a. Recopions et complétons l'algorithme pour atteindre l'objectif demandé:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
u ← 65
n ← 0
Tant que u < 85
    | n ← n + 1
    | u ← 0,8 x u + 18
Fin Tant que
```

3. b. Déterminons la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme:

Pour répondre à cette question, nous allons dresser un tableau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	65	70	74	77,2	79,8	81,8	83,4	84,8	85,8

Nous nous arrêtons quand **n = 8** car c'est à partir de cette valeur entière-là que $U_n \geqslant 85$.

3. c. Résolvons l'inéquation $U_n \geqslant 85$:

$U_n \geqslant 85 \iff 90 - 25 \times (0,8)^n \geqslant 85$

$<=> \quad 25 \times (0,8)^n \leqslant 5$

$<=> \quad (0,8)^n \leqslant \dfrac{1}{5}$

$<=> \quad n \cdot \ln(0,8) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

$<=> \quad n \geqslant \dfrac{-\ln(5)}{\ln(0,8)}$, car: $\quad 0,8 \in]\,0\,;\,1\,[$, et donc: $\quad \ln(0,8) < 0$

$=> \quad n \geqslant 8$, car n est un entier naturel.

En conclusion: nous retrouvons bien par le calcul le résultat de la question précédente **3. b.**

4. a. Justifions que la suite (U_n) permet cette modélisation:

- D'après l'énoncé, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement en juillet 2017.

D'où: $U_0 = 65$ particuliers.

- De plus, chaque mois, les souscriptions évoluent comme suit:

  - d'un mois à l'autre, environ 20% des abonnements sont résiliés,
  - et, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

Soient:
- U_{n+1}, le nombre d'abonnés au panier bio le (n+1)ième mois qui suit juillet 2017,
- U_n, le nombre d'abonnés au panier bio le (n)ième mois qui suit juillet 2017.

Pour tout entier naturel n, le nombre d'abonnés le (n+1)ième mois qui suit juillet 2017 est égal à celui U_n diminué de 20% et augmenté de 18 abonnements.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n - 20\% U_n + 18 \Rightarrow U_{n+1} = 0,8 U_n + 18.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,8 U_n + 18$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et donc: **la suite (U_n) permet bien la modélisation du nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit juillet 2017.**

4. b. La recette mensuelle va-t-elle dépasser 4 420 € en 2018:

La recette mensuelle U_n, le mois " **n** ", nous est donnée par la formule:

R = prix d'un abonnement x nombre d'abonnés **cad ici**: **$R = 52$ € x U_n.**

La question est de savoir à partir de quel mois " **n** ": **R > 4 420 €** ?

$$R > 4\,420 \text{ €} \iff 52 \times (90 - 25 \times (0,8)^n) > 4\,420$$

$$\iff n \cdot \ln(0,8) < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow n \geq 8, \text{ d'après la question } 3.\ c.$$

En conclusion: **oui**, 8 mois après juillet 2017, soit à partir du mois de **mars 2018**, la société aura une recette mensuelle supérieure à 4 420 €.

4. c. Vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société ?

En $+\infty$, comme $(0,8)^n$ tend vers 0: la recette mensuelle de la société tendra vers 52 € x 90 = 4680 euros.