# Spé Maths
## Terminale

## Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# SYSTÈME DE FILTRATION

## CORRECTION

**1. Vérifions que $a_2 = 1878,8$ kg:**

Il s'agit de calculer $a_2$.

$a_2 = (1 + 2\%)\, a_1 - 100$, avec: $a_1 = (1 + 2\%)\, a_0 - 100$.

D'où: $a_2 = (1 + 2\%) \times ((1 + 2\%)\, a_0 - 100) - 100$

$= (1,02)^2 \times 2\,000 - 202$

$\Rightarrow$ $a_2 = 1878,8$ kg.

Ainsi, la masse d'algues dans l'étang après deux jours de fonctionnement du système de filtration est bien de: 1878,8 kg.

**2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,02\, a_n - 100$:**

- D'après l'énoncé, la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg.

D'où: $a_0 = 2\,000$ kg.

- De plus, chaque jour, la masse d'algues évolue comme suit:
  - en journée, elle augmente de 2%,
  - et, elle diminue de 100 kg grâce à la mise en place pendant une heure du système de filtration.

Soient: • $a_{n+1}$, la masse d'algues dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant $(n+1)$ jours,

• $a_n$, la masse d'algues dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant $(n)$ jours.

Pour tout entier naturel n, la masse d'algues $a_{n+1}$ dans l'étang (en kg) après utilisation du système de filtration pendant $(n+1)$ jours est égale à celle $a_n$ augmentée de 2% et diminuée de 100 kg.

Pour tout entier naturel n:

$$a_{n+1} = a_n + 2\%\, a_n - 100 \Rightarrow a_{n+1} = 1,02\, a_n - 100.$$

Au total, nous avons bien: $a_{n+1} = 1,02\, a_n - 100$.

**2. b. Montrons que $(b_n)$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme $b_0$ que l'on précisera:**

$b_n = a_n - 5000 \iff b_{n+1} = a_{n+1} - 5000$

$\iff b_{n+1} = (1,02\, a_n - 100) - 5000 \quad (1)$.

Or: $b_0 = a_0 - 5000 \Rightarrow b_0 = 2000 - 5000 = -3000$ et $a_n = b_n + 5000$.

Ainsi: $(1) \iff b_{n+1} = (1,02\,[b_n + 5000] - 100) - 5000$

$\Rightarrow b_{n+1} = 1,02\, b_n$.

Par conséquent, $(b_n)$ est bien une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $b_0 = -3000$ kg.

**2. c. c1. Déduisons-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $b_n$ en fonction de n:**

Comme $b_{n+1} = 1,02\, b_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$b_n = b_0 \times (1,02)^n$, avec: $b_0 = -3000$.

**2. c. c2. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5000 - 3000 \times 1,02^n$:**

Nous savons que: * $b_n = -3000 \times (1,02)^n$

* $a_n = b_n + 5000$.

D'où: $a_n = -3000 \times (1,02)^n + 5000$ ou: $a_n = 5000 - 3000 \times (1,02)^n$.

**2. d. Déterminons la limite de la suite $(a_n)$ et justifions que les algues finissent par disparaître:**

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 5000 - 3000 \times (1,02)^n$$

$= -\infty$ car: $\lim_{n \to +\infty} (1,02)^n = +\infty$, car: $1,02 > 1$.

Or: $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ revient à dire $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ car avoir une masse d'algues négative dans l'étang n'a aucune signification !!!

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

En conclusion: au bout de n jours (" n " très grand), la masse d'algues dans l'étang deviendra nulle.

En d'autres termes, au bout de n jours (" n " très grand), les algues finissent par disparaître.

**3. a. Recopions et complétons l'algorithme:**

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

$N \leftarrow 0$

$A \leftarrow 2000$

Tant que $A \geqslant 0$

$A \leftarrow 1,02 \times A - 100$

$N \leftarrow N + 1$

Fin Tant que

Afficher $N$

**3. b. Déterminons le résultat renvoyé par l'algorithme:**

L'algorithme renvoie la valeur: $N = 26$ car: $a_{25} \approx 78,2$ et $a_{26} \approx -20,15$.

**4. a. Résolvons l'inéquation $5000 - 3000 \times (1,02)^n \leqslant 0$:**

$$5000 - 3000 \times (1,02)^n \leqslant 0 \iff (1,02)^n \geqslant \frac{5}{3}$$

$$\iff n \cdot \ln(1,02) \geqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,02)}$$

$$\Rightarrow n \geqslant 26, \text{ car } n \text{ est un entier naturel.}$$

En conclusion, l'inéquation $5000 - 3000 \times (1,02)^n \leqslant 0$ a pour solution: $n \geqslant 26$.

**4. b. Interprétons le résultat obtenu:**

Au bout de 26 jours exactement, les algues finiront par disparaître dans l'étang.

On retrouve ainsi le résultat trouvé à la question **3. b.**