Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LES ARBRES DÉTRUITS ...

CORRECTION

1. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,996\,U_n + 7,2$:

• D'après l'énoncé, en 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre.

D'où: $U_0 = 4\,000$ millions d'hectares.

• De plus, chaque année, cette surface diminue de 0, 4% et est en partie compensée d'un reboisement de 7, 2 millions d'hectares.

Soient:
- U_{n+1}, une estimation de la surface mondiale de forêt (en millions d'hectares) l'année (2015 + (n+1)),
- U_n, une estimation de la surface mondiale de forêt (en millions d'hectares) l'année (n).

Freemaths : Tous droits réservés

Pour tout entier n, une estimation de la surface mondiale de forêt U_{n+1} est égal à l'estimation U_n diminuée de 0, 4% et augmentée de 7, 2 millions d'hectares.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 0,4\%\, U_n + 7,2 \iff U_{n+1} = 0,996\, U_n + 7,2.$

2. Recopions et complétons l'algorithme:

La partie **TRAITEMENT** complétée est la suivante:

Traitement:	Tant que $U \geqslant 3500$ faire:
	U prend la valeur $0,996 \times U + 7,2$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin Tant que

3. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 1800 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 1800$

$\iff V_{n+1} = (0,996\, U_n + 7,2) - 1800 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 1800 \Rightarrow V_0 = 2200$ et $U_n = V_n + 1800.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,996\,[\,V_n + 1800\,] + 7,2) - 1800$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,996\, V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,996$ et de premier terme $V_0 = 2200.$

3. b. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n, $U_n = 2200 \times 0,996^n + 1800$:

Nous savons que: * $V_n = 2200 \times (0,996)^n$ (d'après le cours)

* $U_n = V_n + 1800.$

D'où: $U_n = 2200 \times (0,996)^n + 1800.$

3. c. La surface des forêts sur terre va-t-elle disparaître ?

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n .$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 2200 \times (0,996)^n + 1800$$

$$= 1800 \quad \text{car:} \quad \lim_{n \to +\infty} (0,996)^n = 0, \quad \text{car:} \quad 0,996 \in]\,0,1\,[.$$

La suite (U_n) est donc convergente et converge vers 1800 millions d'hectares.

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), il restera toujours 1800 millions d'hectares de forêts sur terre.

Donc non, la surface des forêts sur terre ne disparaîtra pas.

4. L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025 ?

Soit N, le nombre total d'arbres plantés entre 2016 et 2025.

$N = 7,3 + 7,3 \times (1 + 10\%) + 7,3\,(1 + 10\%)^2 + \ldots + 7,3\,(1 + 10\%)^9.$

Donc: $N = 7,3\,(1 + 1,1 + (1,1)^2 + \ldots + (1,1)^9)$

cad: $N = 7,3 \times \left[\dfrac{1 - (1,1)^{10}}{1 - 1,1} \right]$ (formule de cours).

Dans ces conditions: $N = 7,3 \times [\,10 \times (1,1)^{10} - 10\,]$

$\Rightarrow$ N = 116,343 millions d'arbres replantés de 2016 à 2025.

Au total: comme $116,343 < 140$, l'ONU ne réussira pas à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025.

Freemaths : Tous droits réservés