

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE NOUVEAU LYCÉE

CORRECTION

1. a. Calculons le nombre d'élèves qui seront inscrits en 2014:

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 - 30\%) U_0 + 300 \iff U_1 = 0,7 \times 500 + 300$$

$$\implies U_1 = 650 \text{ élèves.}$$

Ainsi, en 2014, il y aura: 650 élèves dans le nouveau lycée.

1. b. Calculons le nombre d'élèves qui seront inscrits en 2015:

Il s'agit de calculer U_2 .

$$U_2 = (1 - 30\%) U_1 + 300 \iff U_2 = 0,7 \times 650 + 300$$

$$\implies U_2 = 755 \text{ élèves.}$$

Ainsi, en 2015, il y aura: 755 élèves dans le nouveau lycée.

2. Justifions que, pour tout entier n , $U_{n+1} = 0,7 U_n + 300$:

- D'après l'énoncé, le lycée a 500 élèves en 2013.

D'où: $U_0 = 500$.

- De plus, chaque année 30% des élèves partent et 300 nouveaux élèves arrivent.

Soient: • U_{n+1} , le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année

$$(2013 + (n + 1)),$$

• U_n , le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année

(2013 + (n)).

Pour tout entier naturel n , le nombre d'élèves inscrits " U_{n+1} " est égal au nombre d'élèves inscrits " U_n " diminué de 30% et augmenté de 300 " nouveaux élèves. "

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 30\% U_n + 300 \iff U_{n+1} = 0,7 U_n + 300.$$

3. Déterminons en justifiant l'algorithme choisi:

Nous retiendrons l'algorithme n°2 car:

pour un entier donné n , il affiche tous les termes de la suite (U_n) du rang 0 au rang n . Il effectue ainsi $(n + 1)$ affichages de la variable u donnant la valeur de U_n .

4. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$\begin{aligned} V_n = U_n - 1000 &\iff V_{n+1} = U_{n+1} - 1000 \\ &\iff V_{n+1} = (0,7 U_n + 300) - 1000 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 1000 \implies V_0 = -500 \text{ et } U_n = V_n + 1000.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\iff V_{n+1} = (0,7 [V_n + 1000] + 300) - 1000 \\ &\implies V_{n+1} = 0,7 V_n \text{ ou } V_n = -500 \times (0,7)^n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $V_0 = -500$.

4. b. Dédisons-en que pour tout entier n , $U_n = 1000 - 500 (0,7)^n$:

$$\text{Nous savons que: } * V_n = -500 \times (0,7)^n$$

$$* U_n = V_n + 1000.$$

$$\text{D'où: } U_n = (-500 \times (0,7)^n) + 1000,$$

$$\text{cad: } U_n = 1000 - 500 \times (0,7)^n.$$

4. c. Déterminons la limite de (U_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1000 - 500 \times (0,7)^n$$

$$= 1000 \quad \text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0, \quad \text{car: } 0,7 \in]-1, 1[.$$

$$\text{Au total: } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1000 \text{ élèves.}$$

4. d. Interprétation:

Cela signifie que dans n années (" n " très grand), il y aura: 1000 élèves dans le nouveau lycée.

5. a. Résolvons $U_n \geq 990$:

$$U_n \geq 990 \Leftrightarrow 1000 - 500 (0,7)^n \geq 990$$

$$\Leftrightarrow -500 (0,7)^n \geq -10$$

$$\Leftrightarrow 500 (0,7)^n \leq 10$$

$$\Leftrightarrow (0,7)^n \leq \frac{1}{50}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,7) \leq -\ln(50)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(50)}{\ln(0,7)}, \quad \text{car: } 0,7 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,7) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 10,97.$$

Nous prendrons $n = 11$ ans car n est un entier naturel.

5. b. Interprétation:

Cela signifie que dans 11 ans, cad à partir de 2024, le nouveau lycée comptera plus de 990 élèves.