

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE BARRAGE

CORRECTION

1. a. Calculons le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi:

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 + 6\%) U_0 - 0,15 \iff U_1 = 1,06 \times 6,05 - 0,15$$

$$\Rightarrow U_1 = 6,263 \text{ mètres ou: } U_1 = 626,3 \text{ cm.}$$

Ainsi, le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi est de: 626,3.

1. b. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1,06 U_n - 15$:

- D'après l'énoncé, le niveau d'eau du lac le 1^{er} janvier 2018, à midi, était de 6,05 mètres.

$$\text{D'où: } U_0 = 6,05 \text{ mètres ou: } U_0 = 605 \text{ cm.}$$

- De plus, chaque jour, le niveau d'eau du lac évolue comme suit:
 - une augmentation de 6% du niveau d'eau grâce à la rivière,
 - et, une baisse de 15 cm du niveau d'eau à cause d'un écoulement à travers le barrage.

Soient: • U_{n+1} , le niveau d'eau du lac à midi, en cm, $(n+1)$ jours après le 1^{er} janvier 2018,

• U_n , le niveau d'eau du lac à midi, en cm, (n) jours après le 1^{er} janvier 2018.

Pour tout entier naturel n , le niveau d'eau du lac à midi, en cm, U_{n+1} est égal à celui U_n augmenté de 6% et diminué de 15 cm.

Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n + 6\% U_n - 15 \Rightarrow U_{n+1} = 1,06 U_n - 15.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 1,06 U_n - 15$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et précisons V_0 :

$$V_n = U_n - 250 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 250$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,06 U_n - 15) - 250 \quad (1).$$

Or: $V_0 = U_0 - 250 \Rightarrow V_0 = 605 - 250 = 355$ et $U_n = V_n + 250$.

Ainsi: $(1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (1,06 [V_n + 250] - 15) - 250$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 1,06 V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $V_0 = 355$ cm.

2. b. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 355 \times 1,06^n + 250$:

Nous savons que: * $V_n = 355 \times (1,06)^n$ (d'après le cours)

$$* U_n = V_n + 250.$$

D'où: $U_n = 355 \times (1,06)^n + 250$.

3. a. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 355 \times (1,06)^n + 250$$

$$= +\infty \quad \text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1,06)^n = +\infty, \quad \text{car: } 1,06 > 1.$$

La suite (U_n) est donc: *divergente (cad pas convergente).*

3. b. L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau:

Oui, l'équipe d'entretien devra ouvrir les vannes un jour x afin de réguler le niveau d'eau.

En effet, un certain jour x le niveau du lac dépassera forcément 10 mètres

$$\text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

4. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```

N ← 0
U ← 605
Tant que U < 1000 faire
    U ← 1,06 x U - 15
    N ← N + 1
Fin Tant que
  
```

4. b. Déterminons ce que contient la variable N , à la fin de l'exécution:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer « x » tel que:

$$u_x \geq 1000. \quad (1000 \text{ cm} = 10 \text{ mètres})$$

$$u_x \geq 1000 \Leftrightarrow 355 \times (1,06)^x + 250 \geq 1000$$

$$\Leftrightarrow 355 \times (1,06)^x \geq 750$$

$$\Leftrightarrow (1,06)^x \geq \frac{750}{355}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln(1,06) \geq \ln\left(\frac{750}{355}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln\left(\frac{750}{355}\right)}{\ln(1,06)}, \text{ car: } 1,06 > 1, \text{ et donc: } \ln(1,06) > 0$$

$$\Rightarrow x \geq 13, \text{ car } x \text{ est un entier naturel.}$$

Ainsi, 13 jours après le 1^{er} janvier 2018, l'équipe de techniciens interviendra.

En d'autres termes, le 14 janvier 2018, le niveau du lac dépassera 10 mètres cad 1000 cm.

4. c. Déduisons la première date d'intervention des techniciens:

Comme dit précédemment: intervention le 14 janvier 2018.