

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. Expliquons ce qu'on obtient avec cet algorithme:

Cet algorithme permet le calcul du nombre de clients de l'opérateur de téléphonie pendant 8 ans à compter de 2010.

Il nous donne ainsi le nombre de clients de 2011 à 2018.

1. b. Complétons le tableau:

" Chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients ".

D'où le tableau suivant:

| K | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| nombre de clients | 1 000 000 | 960 000 | 924 000 | 891 600 | 862 440 | 836 196 |

2. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons q et V_0 :

$$V_n = U_n - 600 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 600$$

$$\iff V_{n+1} = (0,9 U_n + 60) - 600 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 600 \implies V_0 = 400 \text{ et } U_n = V_n + 600.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \iff V_{n+1} = (0,9 [V_n + 600] + 60) - 600$$

$$\implies V_{n+1} = 0,9 V_n$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 400$.

2. b. Déterminons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,9 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,9)^n, \text{ avec: } V_0 = 400.$$

2. c. Montrons que pour tout entier naturel n , $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600$:

Nous savons que: * $V_n = 400 \times (0,9)^n$

$$* U_n = V_n + 600.$$

D'où: $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600$.

2. d. Montrons que (U_n) est décroissante et interprétons:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, et ce, pour tout entier naturel n .

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (400 \times (0,9)^{n+1} + 600) - (400 \times (0,9)^n + 600) \\ &= 400 \times (0,9)^n [0,9 - 1] \\ &= -0,1 \times (400 \times (0,9)^n) \\ &= -40 \times (0,9)^n. \end{aligned}$$

Donc pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n < 0$.

Au total: la suite (U_n) est strictement décroissante.

Nous pouvons interpréter ce résultat par le fait que le nombre de clients de l'opérateur de téléphonie diminue d'année en année.

3. Déterminons le nombre d'années " n " nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients:

" Chaque année à compter de 2014, l'opérateur ne perd plus que 8% de ses clients et regagne 100000 nouveaux clients ".

Donc l'année $(2014 + (n + 1))$, il y aura: $\theta_{n+1} = 0,92 \times \theta_n + 100\,000$,
 θ_n étant le nombre de clients l'année $(2014 + (n))$.

Or le nombre de clients comptabilisés en 2014 est de: 860 000.

D'où: $\theta_0 = 860\,000$.

Ainsi: • $\theta_0 = 860\,000$

$$\bullet \theta_1 = 0,92 \times \theta_0 + 100\,000 \Rightarrow \theta_1 = 891\,200$$

$$\bullet \theta_2 = 0,92 \times \theta_1 + 100\,000 \Rightarrow \theta_2 = 919\,900$$

$$\bullet \theta_3 = 0,92 \times \theta_2 + 100\,000 \Rightarrow \theta_3 = 946\,311$$

$$\bullet \theta_4 = 0,92 \times \theta_3 + 100\,000 \Rightarrow \theta_4 = 970\,607$$

$$\bullet \theta_5 = 0,92 \times \theta_4 + 100\,000 \Rightarrow \theta_5 = 992\,958$$

$$\bullet \theta_6 = 0,92 \times \theta_5 + 100\,000 \Rightarrow \theta_6 = 1\,013\,522.$$

Ainsi: $\theta_6 > 1\,000\,000$ clients.

Au total, en 2020 $(2014 + 6)$, l'opérateur retrouvera au moins un million de clients.