Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA MÉDIATHÈQUE

CORRECTION

1. a. Calculons a_1 et a_2:

Il s'agit de calculer a_1 et a_2.

• $a_1 = (1 - 20\%^*)\ a_0 + 400 \iff a_1 = 0,8 \times 2\,500 + 400$

$\Rightarrow a_1 = 2\,400$ inscriptions.

(* : car 1 - 80% = 20% inscriptions en moins)

• $a_2 = (1 - 20\%)\ a_1 + 400 \iff a_2 = 0,8 \times 2\,400 + 400$

$\Rightarrow a_2 = 2\,320$ inscriptions.

Ainsi, en 2014 et 2015, il y aura respectivement: 2 400 inscriptions et, 2 320 inscriptions.

1. b. Justifions que, pour tout entier naturel, $a_{n+1} = 0,8\ a_n + 400$:

• D'après l'énoncé, la médiathèque a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.

D'où: $a_0 = 1500$.

• De plus, chaque année 20% des inscrits partent et 400 nouveaux adhérents s'inscrivent.

Soient: • a_{n+1}, le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $(2013 + (n + 1))$,

• a_n, le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $(2013 + (n))$.

Pour tout entier naturel n, le nombre d'inscrits " a_{n+1} " est égal au nombre d'inscrits " a_n " diminué de 20% et augmenté de 400 " nouveaux adhérents ".

Donc pour tout entier naturel n:

$a_{n+1} = a_n - 20\%\ a_n + 400 \iff a_{n+1} = 0,8\ a_n + 400.$

2. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = a_n - 2000 \iff V_{n+1} = a_{n+1} - 2000$

$\iff V_{n+1} = (0,8\ a_n + 400) - 2000 \quad (1).$

Or: $V_0 = a_0 - 2000 \Rightarrow V_0 = 500$ et $a_n = V_n + 2000.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,8\,[V_n + 2000] + 400) - 2000$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,8\ V_n$ ou $V_n = 500 \times (0,8)^n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = 500.$

2. b. Déduisons-en que pour tout entier n, $a_n = 500 \times (0,8)^n + 2000$:

Nous savons que: * $V_n = 500 \times (0,8)^n$

* $a_n = V_n + 2000.$

D'où: $a_n = 500 \times (0,8)^n + 2000.$

2. c. Déterminons la limite de (a_n):

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 500 \times (0,8)^n + 2000$

$= 2000$ car: $\lim_{n \to +\infty} (0,8)^n = 0,$ car: $0,8 \in]-1, 1[.$

Au total: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 2000$ inscriptions.

2. d. Que peut-on en déduire ?

Si le schéma d'inscriptions reste le même au cours des années à venir, alors dans n années (" n " très grand), il y aura: 2 000 adhérents à la médiathèque.

3. a. Expliquons ce que permet de calculer cet algorithme:

Cet algorithme permet le calcul de " k " tel que: $a_k < 2\,050$.

3. b. Résolvons $a_k < 2\,050$:

$a_k < 2\,050 \iff 500 \times (0,8)^k + 2\,000 < 2\,050$

$\iff (0,8)^k < 0,1$

$\iff k \ln(0,8) < \ln(0,1)$

$\iff k > \dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)}$, car: $0,8 \in]0,1[$, et donc: $\ln(0,8) < 1$

$\Rightarrow k > 10,32$.

Nous prendrons $k = 11$ ans car k est un entier naturel.

Ainsi, pendant 11 ans (de 2013 à 2024), le nombre d'inscrits sera strictement supérieur à 2050. Au delà, ce nombre sera inférieur à 2 050.