Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'INFOGRAPHISTE

CORRECTION

1. Calculons U_1 et U_2:

Ici, il s'agit de calculer U_1 et U_2.

• $U_1 = U_0 + 5\% \times U_0 + 20 \iff U_1 = 100 + 5\% \times 100 + 20$ **cad**: $U_1 = 125$ cm.

• $U_2 = U_1 + 5\% \times U_1 + 20 \iff U_2 = 125 + 5\% \times 125 + 20$ **cad**: $U_2 = 151,25$ cm.

Ainsi, les valeurs respectives de U_1 et U_2 sont:

$$U_1 = 125 \text{ cm} \quad \text{et} \quad U_2 = 151,25 \text{ cm}.$$

2. Expliquons pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1,05 \times U_n + 20$:

• D'après l'énoncé, la taille initiale du bambou est de 100 cm.

D'où: $U_0 = 100$ cm.

• De plus, chaque mois, la taille du bambou:

- augmente de 5%,
- et, viennent s'ajouter 20 cm.

• Soient:
- U_{n+1}, la taille (en cm) qu'aurait le bambou à la fin du $(n+1)$-ième mois,
- U_n, la taille (en cm) qu'aurait le bambou à la fin du n-ième mois.

Pour tout entier naturel n, la taille (en cm) qu'aurait le bambou à la fin du $(n+1)$-ième mois est égale à celle U_n augmentée de 5% et aussi de 20 cm.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n + 5\% \times U_n + 20 \quad \text{cad:} \quad U_{n+1} = 1,05 \times U_n + 20.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 1,05\ U_n + 20$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$V_n = U_n + 400 \iff V_{n+1} = U_{n+1} + 400$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\iff V_{n+1} = (1,05\ U_n + 20) + 400 \quad (1).$$

Or: $V_0 = U_0 + 400 \Rightarrow V_0 = 100 + 400 = 500$ et $U_n = V_n - 400$.

Alors: $(1) \iff V_{n+1} = (1,05\,[\,V_n - 400\,] + 20) + 400$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 1,05\ V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $V_0 = 500$.

3. b. Exprimons V_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Comme $V_{n+1} = 1,05\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (1,05)^n$ cad: $V_n = 500 \times (1,05)^n$.

3. c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_n = 500 \times (1,05)^n - 400$:

Nous savons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
* $V_n = 500 \times (1,05)^n$
* $U_n = V_n - 400$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 500 \times (1,05)^n - 400$.

3. d. Calculons la taille du bambou à la fin du 7e mois:

Il s'agit de calculer ici: U_7.

$U_7 = 500 \times (1,05)^7 - 400$ **cad**: $U_7 = 303,55$ cm.

Ainsi, la taille exacte du bambou à la fin du 7e mois sera de: 303, 55 cm.

4. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau recopié et complété est le suivant:

Valeur de u	100	125	151, 25	178, 81	207, 75
Valeur de n	0	1	2	3	4
Test $u < 200$		Vrai	Vrai	Vrai	Faux

4. b. b1. Déterminons la valeur de " n " à la fin de l'exécution de l'algorithme:

Nous nous arrêtons quand $n = 4$ car c'est à partir du 4e mois que la taille en cm du bambou dépasse la contrainte de 200 cm.

Ainsi, la valeur de " n " à la fin de l'exécution de l'algorithme est: $n = 4$.

4. b. b2. Interprétation:

Cela signifie qu'à la fin du 4e mois, la taille en cm du bambou dépassera les 200 cm **cad**: **les 2 mètres !**

4. c. Modifions les lignes nécessaires de l'algorithme:

L'algorithme modifié est le suivant:

$u \leftarrow 50$

$n \leftarrow 0$

Tant que $u < 1000$ faire

$\quad u \leftarrow 1,05 \times u + 20$

$\quad n \leftarrow n + 1$

Fin Tant que