Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CAMPING ET CHENILLES

CORRECTION

Partie 1: Le modèle 1

1. Calculons U_1 et U_2:

Ici, il s'agit de calculer U_1 et U_2.

- $U_1 = q \times U_0 \iff U_1 = 1,63 \times 97$ cad: $U_1 \approx 158 \times 100$ chenilles.
- $U_2 = q \times U_1 \iff U_2 = 1,63 \times 158$ cad: $U_2 \approx 258 \times 100$ chenilles.

Ainsi, les valeurs respectives de U_1 et U_2 sont:

$U_1 \approx 15\,800$ chenilles et $U_2 \approx 25\,800$ chenilles.

2. Exprimons U_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

D'après l'énoncé, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,63$ et de premier terme $U_0 = 97$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire: $U_n = 97 \times (1,63)^n$.

3. Justifions que la suite (U_n) est croissante:

Comme:
- $U_0 = 97 > 0$
- $q = 1,63 > 0$,

d'après le cours, nous pouvons affirmer que la suite (U_n) est strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total: la suite (U_n) est bien croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminons le nombre de chenilles le 13 juin 2018:

Le 13 juin 2018: $n = 12$ (car: le 2 juin, $n = 1$).

Dans ces conditions: $U_{12} = 97 \times (1,63)^{12}$ **cad**: $U_{12} \approx 34\,121 \times 100$ chenilles.

Au total, le nombre de chenilles le 13 juin 2018 sera d'environ: 3 412 100 chenilles.

Partie 2: Le modèle 2

1. Déterminons le nombre de chenilles le 13 juin 2018:

Selon le modèle 2: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{1}{3}(-2\,809 \times (0,91)^n + 3\,100)$.

Or, ici il s'agit de calculer à nouveau U_{12}.

D'où: $U_{12} = \frac{1}{3}(-2\,809 \times (0,91)^{12} + 3\,100)$ **cad**: $U_{12} \approx 731 \times 100$ chenilles.

Ainsi, le nombre de chenilles le 13 juin 2018 sera d'environ: 73 100 chenilles.

2. Montrons que la suite (V_n) est croissante:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{3}(-2\,809 \times (0,91)^{n+1} + 3\,100) - \frac{1}{3}(-2\,809 \times (0,91)^n + 3\,100)$$

$$= \frac{1}{3}(-2\,809 \times [(0,91)^{n+1} - (0,91)^n])$$

$$= \frac{-2\,809}{3}[(0,91)^{n+1} - (0,91)^n].$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(0,91)^{n+1} - (0,91)^n < 0$, car : $0,9 \in]0 ; 1[$.

D'où : $V_{n+1} - V_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total, pour tout entier naturel n : la suite (V_n) est strictement croissante.

Partie 3 : Comparaison

1. Déterminons le modèle le plus adapté :

Le 13 juin 2018, 74500 chenilles sont recensées dans le camping.

Or : • avec le modèle 1 : 3 412 100 chenilles estimé,

• avec le modèle 2 : 73 100 chenilles estimé.

Donc pas photo : nous retiendrons le modèle 2 car il est le plus adapté !

2. a. Résolvons l'inéquation $V_n \geq 1000$:

Nous allons déterminer " n " $\in \mathbb{N}$ tel que : $V_n \geq 1000$.

$$V_n \geq 1000 \iff \frac{1}{3}(-2\,809 \times (0,91)^n + 3\,100) \geq 1000$$

$$\iff 2\,809 \times (0,91)^n \geq 100$$

$$\iff n \cdot \ln(0,91) \leq \ln\left(\frac{100}{2\,809}\right)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{100}{2\,809}\right)}{\ln(0,91)}, \text{ car : } 0,91 \in]0 ; 1[$$

=> $n \geq 36$ jours, car n est un entier naturel.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq 1000$ ssi: $n \geq 36$ jours.

2. b. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie que 36 jours après le 1er juin 2018, le nombre de chenilles dépassera les 100 000 individus !

Et plus exactement: le 7 juillet 2018.