Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NATURE D'UNE SUITE, RÉCURRENCE 5

CORRECTION

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

Or: • $x^2 \geqslant 0$

• $\frac{1}{4} > 0$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, par addition: $x^2 + \frac{1}{4} > 0$ cad $f(x) > 0$.

2. Prouvons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x \geqslant 0$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

Dans ces conditions: $f(x) - x = x^2 + \frac{1}{4} - x$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Or: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $f(x) - x \geqslant 0$.

3. Déduisons-en que la suite (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$:

Pour cela, nous allons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$.

Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x \geqslant 0$.

Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(U_n) - U_n \geqslant 0$ cad $U_{n+1} \geqslant U_n$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$, et donc (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

4. Montrons que la suite (U_n) admet $M = \frac{1}{2}$ comme majorant:

D'après le cours, la suite (U_n) est majorée par M ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant M$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant \frac{1}{2}$ ".

Initialisation: • $U_0 \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right]$, donc $U_0 \leqslant \frac{1}{2}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = U_0^2 + \frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ cad $U_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \leqslant \frac{1}{2}$

et montrons qu'alors $U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Supposons: $\underbrace{U_n \leqslant \frac{1}{2}}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

$(1) \Rightarrow U_n^2 \leqslant \frac{1}{4}$

$\Rightarrow U_n^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow U_n^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}$

$\Rightarrow U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Conclusion: pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leqslant \frac{1}{2}$.

Ainsi: **la suite (U_n) est bien majorée par $M = \frac{1}{2}$.**

5. Montrons que la suite (U_n) est convergente:

D'après le cours, toute suite croissante et majorée est convergente.

Or ici: • (U_n) est majorée par $M = \frac{1}{2}$

• (U_n) est **croissante**.

Donc: **OUI, la suite (U_n) est convergente.**

Elle admet pour limite ℓ telle que: $\ell = \ell^2 + \frac{1}{4}$.

$\ell = \ell^2 + \frac{1}{4}$ <=> $\ell^2 - \ell + \frac{1}{4} = 0$ **cad**: $\ell = \frac{1}{2}$.

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = \frac{1}{2}$.