Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NATURE D'UNE SUITE, RÉCURRENCE

4

CORRECTION

1. Montrons que la suite (U_n) admet $M = \frac{1}{2}$ comme majorant strict:

D'après le cours, la suite (U_n) est majorée par M ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant M$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n < \frac{1}{2}$ ".

Initialisation: • $U_0 = 0 < \frac{1}{2}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = \frac{0 + 1}{2 \times 0 + 3} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n < \frac{1}{2}$

et montrons qu'alors $U_{n+1} < \frac{1}{2}$.

Écrivons autrement la formule de récurrence exprimant un terme de la suite en fonction de son précédent:

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{2U_n + 3} = \frac{\left(U_n + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}}{2U_n + 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2U_n + 3)}.$$

De l'encadrement $0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{2}$, déduisons un encadrement de U_{n+1}:

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 6 \leqslant 2(2U_n + 3) < 8 \text{ donc } \frac{1}{6} \geqslant \frac{1}{2(2U_n + 3)} > \frac{1}{8}$$

$$\text{et: } \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2U_n + 3)} < \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Il en résulte l'encadrement: $0 \leqslant \frac{1}{3} \leqslant U_{n+1} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

Conclusion: pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n < \frac{1}{2}$.

Ainsi: la suite (U_n) est bien strictement majorée par $M = \frac{1}{2}$.

2. Prouvons que la suite (U_n) est strictement croissante:

Pour cela, nous allons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{U_n + 1}{2U_n + 3}\right) - \left(\frac{U_{n-1} + 1}{2U_{n-1} + 3}\right).$$

Dans ces conditions, la suite (U_n) est strictement croissante ssi:

$$\frac{U_n + 1}{2U_n + 3} > \frac{U_{n-1} + 1}{2U_{n-1} + 3} \iff \frac{U_n - U_{n-1}}{(2U_n + 3)(2U_{n-1} + 3)} > 0.$$

Or: • $2U_n + 3 > 0$ **car** $U_n \geqslant 0$, d'après l'énoncé

• $2U_{n-1} + 3 > 0$ **car** $U_n \geqslant 0$, d'après l'énoncé.

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $U_n - U_{n-1}$ qui dépend du signe de $U_{n-1} - U_{n-2}$ . . . qui dépend du signe de $U_1 - U_0$.

Or: $U_1 - U_0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} > 0.$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n > 0$, et donc (U_n) **est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.**

3. Déduisons-en la nature de (U_n):

D'après le cours, toute suite croissante et majorée est convergente.

Or ici: • (U_n) est strictement majorée par $M = \frac{1}{2}$

• (U_n) est **strictement croissante.**

Donc: **OUI, la suite (U_n) est convergente.**

Elle admet pour limite ℓ telle que: $\ell = \frac{\ell + 1}{2\ell + 3}$.

$$\ell = \frac{\ell + 1}{2\ell + 3} \iff 2\ell^2 + 2\ell - 1 = 0.$$

Deux solutions ($\Delta = 12 > 0$) : $\bullet\ \ell_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < 0$

$\bullet\ \ell_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} > 0.$

Nous retiendrons uniquement ℓ_2 car c'est la seule racine strictement positive.

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.