Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NATURE D'UNE SUITE, RÉCURRENCE

3

CORRECTION

1. **Montrons que la suite (U_n) admet $m = 2$ comme minorant strict:**

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant m$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n > 2$ ".

Initialisation: • $U_0 = 3 > 2$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = (3 + 6)^{1/3} = 9^{1/3} > 2$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 2$ et montrons qu'alors $U_{n+1} > 2$.

Supposons: $U_n > 2$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) => $U_n + 6 > 2 + 6$

=> $U_n + 6 > 8$

=> $(U_n + 6)^{1/3} > (8)^{1/3}$

=> $(U_n + 6)^{1/3} > 2$

=> $U_{n+1} > 2$.

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$.

Ainsi: **la suite (U_n) est bien strictement minorée par $m = 2$.**

2. Prouvons que la suite (U_n) est strictement décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Pour cela, nous allons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = (U_n + 6)^{1/3} - U_n.$$

Dans ces conditions, la suite (U_n) est strictement décroissante ssi:

$$U_{n+1} - U_n < 0 \text{ cad } (U_n + 6)^{1/3} - U_n < 0.$$

$(U_n + 6)^{1/3} - U_n < 0 \iff (U_n + 6)^{1/3} < U_n$

$\iff U_n + 6 < U_n^3$

$\iff U_n^3 - U_n - 6 > 0$

$\iff (U_n - 2)(U_n^2 + 2U_n + 3) > 0.$

Or: • $U_n - 2 > 0$ car $U_n > 2$ **car** **(U_n) est strictement minorée par $m = 2$.**

• $U_n^2 + 2U_n + 3 > 0$ **car** **$U_n > 0$, par hypothèse.**

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(U_n - 2)(U_n^2 + 2U_n + 3) > 0$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n < 0$, et donc (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. **Déduisons-en la nature de (U_n):**

D'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- (U_n) est strictement minorée par $m = 2$
- (U_n) est strictement décroissante.

Donc: OUI, la suite (U_n) est convergente.

Elle admet pour limite ℓ telle que: $\ell = (\ell + 6)^{1/3}$.

$\ell = (\ell + 6)^{1/3} \iff \ell^3 - \ell - 6 = 0$

$\iff (\ell - 2)(\ell^2 + 2\ell + 3) = 0$ cad: $\ell = 2$.

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = 0$.