Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NATURE D'UNE SUITE, RÉCURRENCE

2

CORRECTION

1. **Montrons que la suite (U_n) admet $m = \sqrt{2}$ comme minorant strict:**

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geq m$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > \sqrt{2}$ ".

Initialisation: • $U_1 = \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{12} > \sqrt{2}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U_n > \sqrt{2}$
et montrons qu'alors $U_{n+1} > \sqrt{2}$.

Supposons: $U_n > \sqrt{2}$, pour un entier naturel non nul n fixé.
(1)

Étudions la différence : $U_{n+1} - \sqrt{2}$.

$$U_{n+1} - \sqrt{2} = \left(\frac{U_n}{2} + \frac{1}{U_n} \right) - \sqrt{2} = \left(\frac{U_n^2 + 2}{2U_n} \right) - \sqrt{2} = \frac{U_n^2 - 2U_n\sqrt{2} + 2}{2U_n}.$$

Or : $(U_n - \sqrt{2})^2 = U_n^2 - 2 \times U_n \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = U_n^2 - 2U_n\sqrt{2} + 2$.

Ainsi : $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2U_n}$.

L'hypothèse (I) $U_n > \sqrt{2}$ implique à la fois que $(U_n - \sqrt{2})^2 > 0$ et que $U_n > 0$.

Le nombre $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2U_n}$, qui est un quotient de deux réels

strictement positifs, est donc strictement positif.

On obtient l'inégalité : $U_{n+1} - \sqrt{2} > 0$, ou de façon équivalente l'inégalité $U_{n+1} > \sqrt{2}$.

Si $U_n > \sqrt{2}$, alors $U_{n+1} > \sqrt{2}$.

La propriété " $U_n > \sqrt{2}$ " est héréditaire.

Conclusion : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > \sqrt{2}$.

Ainsi : la suite (U_n) est bien strictement minorée par $m = \sqrt{2}$.

2. Prouvons que la suite (U_n) est strictement décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

Pour cela, nous allons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2} + \frac{1}{U_n} - U_n$$

$$= -\frac{U_n}{2} + \frac{1}{U_n}$$

$$= \frac{-U_n^2 + 2}{2U_n}$$

Dans ces conditions, la suite (U_n) est strictement décroissante ssi:

$U_{n+1} - U_n < 0$ **cad** $-U_n^2 + 2 < 0$ **car** $U_n > 0$, **par hypothèse**.

$-U_n^2 + 2 < 0 \iff -U_n^2 < -2$

$\iff U_n^2 > 2$

$\iff U_n > \sqrt{2}$.

Or, (U_n) est strictement minorée par $m = \sqrt{2}$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > \sqrt{2}$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n < 0$ **et donc (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.**

3. Déduisons-en la nature de (U_n):

D'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- (U_n) est strictement minorée par $m = \sqrt{2}$
- (U_n) est **strictement décroissante**.

Donc: OUI, la suite (U_n) est convergente.

Elle admet pour limite ℓ telle que: $\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$.

$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$ <=> $2\ell^2 = \ell^2 + 2$

<=> $\ell^2 = 2$ cad: $\ell = \sqrt{2}$.

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = \sqrt{2}$.