Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

MINORANT PAR RÉCURRENCE 5

CORRECTION

Montrons par récurrence que la suite (U_n) admet $m = 1$ comme minorant strict:

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant m$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n > 1$ ".

Initialisation: • $U_0 = 2 > 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = \dfrac{5 \times 2 - 1}{2 + 3} = \dfrac{9}{5} > 1$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 1$ $(U_n - 1 > 0)$
et montrons qu'alors $U_{n+1} > 1$ $(U_{n+1} - 1 > 0)$.

Supposons: $U_n > 1$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$U_{n+1} - 1 = \frac{5\,U_n - 1}{U_n + 3} - 1$$

$$= \frac{5\,U_n - 1 - U_n - 3}{U_n + 3}$$

$$= \frac{4 \times (U_n - 1)}{U_n + 3}.$$

Or, par hypothèse: $U_n > 1$ **ou encore** $U_n - 1 > 0$.

D'où:
- $U_n + 3 > 1 + 3 = 4$
- $4 \times (U_n - 1) > 0$.

Dans ces conditions: (1) $\Rightarrow \dfrac{4 \times (U_n - 1)}{U_n + 3} > \dfrac{0}{1}$

$\Rightarrow U_{n+1} - 1 > 0$

$\Rightarrow U_{n+1} > 1$.

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

Ainsi: **la suite (U_n) est bien strictement minorée par $m = 1$.**