Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

MINORANT 1

CORRECTION

1. a. Calculons U_0, U_1, U_2 et U_3:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \dfrac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$.

Dans ces conditions:

- $U_0 = \dfrac{1}{2}$
- $U_1 = \dfrac{2}{3}$
- $U_2 = \dfrac{5}{6}$
- $U_3 = \dfrac{10}{11}$.

Ainsi: $U_0 = \dfrac{1}{2}$, $U_1 = \dfrac{2}{3}$, $U_2 = \dfrac{5}{6}$, $U_3 = \dfrac{10}{11}$.

1. b. Que dire a priori ?

A priori:

- la suite (U_n) semble croissante,
- la suite (U_n) semble minorée par $m = \dfrac{1}{2}$.

2. Montrons que la suite (U_n) admet $m = \frac{1}{2}$ comme minorant:

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant m$.

Pour tout entier naturel n, étudions la différence: $U_n - \frac{1}{2}$.

$$U_n - \frac{1}{2} = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2n^2 + 2 - n^2 - 2}{2(n^2 + 2)}$$

$$= \frac{n^2}{2(n^2 + 2)} \geqslant 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En conclusion: la suite (U_n) admet bien $m = \frac{1}{2}$ comme minorant.